Gottlob Frege



SCRIERI LOGICO-FILOSOFICE I

CLASICII FILOSOFIEI UNIVERSALE

GOTTLOB FREGE

LOGISCH-PHILOSOPHISCHE SCHRIFTEN

STUDIU INTRODUCTIV

S-a spus despre Frege că ar fi noul Aristotel al logicii moderne. Comparația aparține și se adresează logicienilor; Frege, într-adevăr, a adus contribuția decisivă la conturarea profilului actual al logicii simbolice. Logica propozițiilor și logica predicatelor, interpretarea semantică, punerea logicii în conexiune cu fundamentele matematicii, logicismul — toate sînt opera, ctitoria profesorului de la Universitatea din Jena. Puțin cunoscut de către contemporanii săi, Frege a fost redescoperit „în etape"; astăzi, statutul său de clasic al logicii nu mai suscită dubii.

Iată însă că prestigiul creației fregeene începe să depășească cadrul limitat al unei discipline particulare pentru a se extinde în sfera filosofiei, unde aduce o spectaculoasă răsturnare de valori. Dintr-un obscur discipol al lui Hermann Lotze — care încercase o îmbinare a direcției neokantiene cu cea platonică — Frege ne apare astăzi într-o lumină cu totul nouă, ca unul dintre cei mai semnificativi și mai originali filosofi ai ultimului veac, ca purtătorul unui mesaj filosofic, deloc ermetic, mesaj cu consecințe îndepărtate și stîrnind un interes tot mai diversificat. Din arhivele de curiozități minore ale cugetării filosofice, obscurul Frege a trecut în ultimul sfert de veac în acea istorie *vie* a filosofiei în care se consumă fără a se spulbera întrebările fundamentale ale spiritului uman. La apariția ei, *Istoria filosofiei occidentale* a lui Russell a putut izbi nu numai prin cîteva aprecieri exclusiviste și nedrepte, dar și prin faptul că îi făcea un loc lui Frege într-o istorie care nu era decît incidental a logicii. Astăzi ne-am putea declara nesatisfăcuți mai curînd de faptul că Russell are o viziune parțială asupra contribuției lui Frege într-o istorie a filosofiei care nu se lasă absorbită în istoria constituirii filosofiei analitice. Dacă ar fi să spunem că metoda analitică în filosofie nu este monopolul așa-numitei filosofii analitice, și încă ar fi destul pentru a desprinde opera lui Frege de la remorca unei filosofii atît de puțin comprehensive cum este cea analitică. Dar se mai adaugă la aceasta împrejurarea că Frege i-a putut influ-

ența durabil nu numai pe Russell, Wittgenstein, Carnap, ei înșiși figuri proeminente ale filosofiei secolului XX, ci și pe Husserl care mergea într-o direcție opusă, aruncînd o sondă filosofică în profunzimile subiectivității umane. Iar astăzi Frege ne apare drept unul din acei gînditori ale căror surse trebuie căutate la filosofi de talia unui Leibniz sau Kant și ale cărui adrese nu s-au epuizat. De la întrebări fundamentale pornește Frege, pentru a răspunde într-o manieră care permite scoaterea unor consecințe fructuoase, mai generale, din examinarea unor probleme exacte în spatele cărora se profilează teme fundamentale, spre exemplu natura judecăților matematice, locul logicii în edificiul cunoașterii umane, raportul dintre expresie și conținut de gîndire, dintre concept, reprezentare și obiect.

Frege a intrat în istoria filosofiei nu în calitate de creator al vreunui sistem filosofic. Epoca sistemelor filosofice era revolută și, pe de altă parte, Frege era și vroia să fie matematician. Înseși căutările sale logice au o unică motivație: fundarea aritmeticii pe o bază logicistă, ca un corp deductiv de propoziții *ex ratione*, non-factuale, apriorice, logic-necesare. Rezultatele extraordinare la care a ajuns în logică trebuiau ele însele fundate teoretic, nu mai puțin decît întregul program logicist; așa se face că, pornind din sfera matematicii, Frege a ajuns la filosofia matematicii, la filosofia logicii și la filosofia limbajului. Aceste trei direcții de preocupări fuzionează într-un complex de idei bine închegat, în așa fel încît linii de netrecut între ele nu există. Opera lui Frege nu reprezintă un tratat universitar cu despărțăminte rigide, ci o creație vie, în care fundamentele logicii, matematicii și limbajului se conectează într-un corp unitar, se implică reciproc și își demonstrează o relevanță epistemologică generală.

Dacă nu găsim — și nu este cazul să căutăm — în opera lui Frege un răspuns la marile probleme fundamentale ale existenței umane, la raportul dintre om și lume, în schimb problemele de importanță majoră pentru cunoașterea logică și matematică au fost analizate cu o pătrundere inegalată. Frege a dovedit *in actu* că analiza logică, „microscopul logistic“ constituie o metodă într-adevăr fecundă și înnoitoare în cercetarea minuțioasă a unor zone ale epistemologiei. Probleme ca raportul dintre logică și ma-

tematică, aspectele analitice ale cunoașterii matematice, raportul dintre elementul formal și conținutul cunoașterii, dintre limbă și gîndire, dintre limba obișnuită și limbajul artificial, alături de multe altele, au fost investigate de către Frege într-o manieră care a prefigurat, a statornicit cadrul în care aveau să se desfășoare dezbaterile epistemologice ale secolului nostru. Logica a avut întotdeauna o însemnătate formativă și filosofică generală; în mod eronat, unii au putut crede că ascensiunea logicii matematice este o tristă specializare alexandrină a unei discipline care și-a epuizat valențele ei general-filosofice. Nu există dezmințire mai elocventă a unei asemenea aparențe decît ceea ce a creat Frege.

Opera sa aparține filosofiei universale în aceeași măsură și cu același drept cu care *Categoriile* și *Analiticile* lui Aristotel aparțin marii tradiții a gîndului teoretic.



Viața lui Frege este săracă în evenimente exterioare, însă biografia operei îi conferă un puternic dramatism subteran.

Gottlob Frege s-a născut la Wismar la 8 noiembrie 1848 și a murit la Bad Kleinen la 26 iulie 1925. Din 1876 a predat la Universitatea din Jena, pînă la pensionarea sa (în 1918) cu gradul de „profesor extraordinar"; trecerea sa din viață a trecut aproape neobservată, iar de popularitatea lui Couturat, Russell sau Hilbert nu s-a bucurat niciodată în lungul drum al vieții sale.

Prima lucrare importantă a lui Frege este cartea *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* („Scriere conceptuală; un limbaj formalizat al gîndirii pure, modelat după limba aritmeticii"), care apare la Halle în 1879. Chiar dacă G. Frege nu ar mai fi creat nimic după aceea, prin cartea lui ar fi înscris în orice caz un capitol înnoitor în istoria logicii. *Begriffsschrift* marchează intrarea logicii matematice într-o nouă etapă de evoluție, prin părăsirea făgașului „algebrei logicii" deschis de Boole. *Begriffsschrift* este importantă pentru logica propozițiilor, logica predicatelor, teoria relațiilor și fundațiile aritmeticii. Logica propozițiilor fusese elaborată în antichitate de către stoici, preluată sau redescoperită de către lo-

gicienii medievali şi, în cele din urmă, George Boole o regăsise ca pe o posibilă interpretare secundă a algebrei logicii (concepută în primul rînd ca algebră a claselor). Frege redescoperă logica propoziţiilor[1] şi o dezvoltă în mod riguros, pe o cale proprie, introducînd un simbolism izvorît dintr-o altă perspectivă teoretică. Începînd de la *Begriffsschrift*, logica propoziţiilor îşi capătă caracterul ei fundamental, de teorie de început a logicii, teorie presupusă şi înglobată în alte teorii mai complexe.

Mai importantă încă este crearea acelei teorii care se numeşte astăzi „logica predicatelor", „logica funcţională" sau, în sfîrşit, „teoria cuantificării". Frege este părintele acestei logici cu totul noi; spre deosebire de logica propoziţiilor, a cărei extindere este, logica predicatelor nu poate fi interpretată ca algebră booleană. Aici, Frege inovează la modul absolut, importanţa teoriei sale fiind cu totul covîrşitoare: logica formală capătă astfel forţă de propulsie, devine aptă să formalizeze structura mai fină a raţionamentelor în care intervin propoziţii existenţiale şi generale, se dovedeşte în măsură de a unifica înăuntrul unei singure teorii, în lumina aceloraşi concepte fundamentale, analiza propoziţiilor de predicaţie şi de relaţie. Logica se poate aplica — pentru prima oară — la studiul matematicii. Stăpînirea judecăţilor de relaţie, în adevăr, este condiţia *sine qua non* a aplicaţiei logicii la fundamente.

Descoperirile lui Frege — cum spuneam — descind dintr-o perspectivă teoretică nouă. Frege este logicist: consideră că toate ideile matematicii (în particular, ideile aritmeticii şi analizei) trebuie definite exclusiv prin idei logice şi că adevărurile matematicii derivă toate din adevăruri logice. Oricum am aprecia această concepţie-program (despre ea va fi vorba mai jos) nu se poate tăgădui rolul ei stimulator, determinant pentru întreaga înnoire

---

[1] Probabil că nu există ştiinţă în care, ca în logică, să se fi redescoperit de atîtea ori — şi la distanţe în timp atît de impresionante — lucruri de atîtea ori redescoperite. Care să fie oare cauza? Este adevărat că şi în alte ştiinţe întîlnim cazuri similare: se redescoperă, dar mai ales se descoperă simultan, independent, aceeaşi propoziţie sau aceeaşi teorie. În logică însă, teorii fundamentale au fost pur şi simplu uitate, căzînd în desuetudine; este o proastă circulaţie a ideilor în logică, de-a lungul veacurilor, şi ar fi interesant să se expliciteze cauzele acestui fenomen.

a logicii ce se leagă de numele lui Frege. De vreme ce logica întemeiază matematica, nu mai poate fi vorba — ca la Boole — de aplicarea algebrei în logică. Logica trebuie să-şi găsească propriile sale aşezări, să stea pe propriile-i picioare. Ori de cîte ori s-ar părea că un concept sau procedeu de ordin matematic îşi găseşte aplicarea în logică, lucrurile stau aşa numai din punctul de vedere al istoriei cunoaşterii; în ordine teoretică, crede Frege, ideea sau procedeul matematic respectiv trimite de fapt, în forma sa generală, la logică.

Ajungem astfel la noţiunea centrală din *Begriffsschrift*, care va fi reluată într-o serie de articole ulterioare, pentru că stă la baza întregii logici a lui Frege: ideea de funcţie. Frege supune unei analize logice o serie de noţiuni fundamentale (variabilă, funcţie etc.), dezvăluindu-le o semnificaţie ascunsă, ignorată pînă la el, le generalizează, astfel încît aplicarea lor anterioară în matematică se dovedeşte a fi un caz particular. În generalitatea lor, aceste idei aparţin — potrivit lui Frege — logicii. Iar introducerea noţiunii de funcţie logică — şi în strînsă legătură cu aceasta, înţelegerea conceptului ca funcţie logică —, permite elaborarea calculului predicatelor, odată cu introducerea cuantorilor în logică.

De asemenea, fără a epuiza nicidecum problematica bogată din *Begriffsschrift*, se cere amintit că Frege prezidează constituirea logicii matematice în forma ei modernă prin introducerea — sau reintroducerea[2] — metodei axiomatice în logică.

Cartea lui Frege a rămas la apariţie aproape neobservată, iar puţinele ecouri stîrnite au fost mai degrabă negative (de exemplu, recenzia făcută de E. Schröder) şi aceeaşi indiferenţă va întîm-

[2] I se atribuie lui Aristotel — de către Łukasiewicz, de pildă — meritul de a fi construit silogistica sa ca un sistem axiomatic, ceea ce este desigur exagerat, cum remarcă unii critici ai lui Łukasiewicz, de pildă Günter Patzig. În orice caz, elemente ale metodei axiomatice pot fi întîlnite în *Analitici:* demonstrarea unor moduri silogistice din altele. Desigur, nu trebuie omisă distincţia dintre metodă deductivă şi metodă axiomatică.

S-a spus şi despre logica stoică că este construită axiomatic, cele cinci „indemonstrabile" fiind propoziţiile metalogice din care s-ar deriva celelalte. Cert este că metoda axiomatică e aplicată în logica modernă abia începînd de la *Begriffsschrift.* Cartea conţine de asemenea distincţia importantă între teză şi regulă de deducţie.

pina lucrările lui ulterioare; un văl al tăcerii se lasă peste opera lui Frege timp de aproape două decenii. Mai ucigătoare decît orice critică, neînțelegerea sau indiferența aproape generală (printre puținele excepții notabil este Husserl. Interesul manifestat prin anii 1890 și 1900 de către Husserl va face ca opera lui Frege să se adreseze viitorului).

Așa se face că multe dintre invențiile lui Frege vor trebui reinventate; o justificare a lor mai puțin profundă și un aparat simbolic mai „cuminte" le vor face accesibile și vor influența activ, efectiv, dezvoltarea și răspîndirea logicii matematice[3].



Care să fie cauzele acestei tăceri lăsate în jurul operei lui Frege? Este drept că întreaga istorie a logicii moderne s-a izbit de indiferența matematicienilor, de ignoranța și chiar ostilitatea majorității covîrșitoare a filosofilor și logicienilor. Dar izolarea în care a creat Frege pare neobișnuită, chiar dacă o raportăm la acest climat general în care s-a dezvoltat logica nouă în secolul XIX. Izbitor în cazul lui e faptul că înșiși logisticienii, precum și matematicieni angajați în studiul — încă incipient — al fundamentelor științei lor nu-i cunosc sau nu-i înțeleg opera.

---

[3] „Dezvoltarea ulterioară a logicii — scrie Bochenski — nu a pornit de la Frege. Schröder nu-l citează în 1892; Russell mărturisește în 1903 că ar fi învățat multe de la Frege dacă l-ar fi cunoscut. Întrucît însă nu-l cunoștea, l-a urmat pe Peano. Logica matematică modernă pornește — deși Peano este mai puțin profund decît Frege — de la simbolismul acestuia din urmă" (J. M. BOCHENSKI, *Formale Logik*, Verlag Karl Albert, Freiburg-München, 1956, p. 369). La rîndul său, Bertrand Russell caracterizează distincțiile ce se cer făcute între judecata singulară și judecata universală, precum și între clasa cu un singur element și însuși acel element ca pe două „progrese pur tehnice" de o însemnătate covîrșitoare pentru filosofia matematicii și adaugă că „aceste progrese fuseseră realizate încă de Frege la o dată anterioară, dar mă îndoiesc dacă Peano (prin intermediul scrierilor căruia Russell s-a familiarizat în 1900 cu aceste idei — n.n.) cunoștea lucrul acesta, iar eu nu am știut aceasta decît ceva mai tîrziu" (BERTRAND RUSSELL, *My Philosophical Developement*, în *The Philosophy of Bertrand Russell*, edited by Paul Arthur Schilpp, New York, 3. edition, 1951, p. 13).

Una din cauze, după cum notează istoricii logicii, este fără îndoială simbolismul fregean, rămas cu totul obscur contemporanilor. Acest simbolism se deosebea totalmente de cel uzitat pînă atunci în logică şi matematică. „Simbolismul lui Frege este desigur cu totul remarcabil: într-adevăr, el este bidimensional. Astfel, el depăşeşte cadrul practicii istorice a omenirii care aproape întotdeauna şi-a exprimat gîndurile într-o scriere unidimensională. Trebuie recunoscut că această înnoire revoluţionară poartă multe cu sine — şi înainte de toate o foarte însemnată extindere a posibilităţilor de expresie ale scrierii. Însă tocmai acest lucru era prea revoluţionar: celor mai mulţi, simbolismul fregean le păru de neînţeles“[4].

Să inspectăm sumar „Scrierea conceptuală“, sau „ideografia“ lui Frege, aşa cum se prezintă ea în *Begriffsschrift*, făcînd abstracţie de extinderile şi modificările ulterioare făcute de Frege[5].

Să luăm o judecată (Urtheil) arbitrară, de exemplu asertarea faptului că „polii magnetici diferiţi se atarg între ei“. Dacă notăm această judecată cu A (A joacă aici rolul unei prescurtări), judecata asertată va fi simbolizată prin:

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- A$$

iar „simplul complex de idei“, sau „conţinutul“ pe care îl exprimă această judecată —, adică faptul că polii magnetici diferiţi se atrag între ei (sau, mai simplu, atracţia polilor magnetici diferiţi[6]) — va fi redat simbolic, prin intermediul liniei orizontale:

$$-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- A$$

---

[4] J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*, p. 369.

[5] În afară de folosirea altor litere greceşti pentru variabile, aceste modificări privesc în special interpretarea sistemului, legat de aprofundarea şi dezvoltarea ideii de funcţie, precum şi de introducerea distincţiei între „Sinn“ şi „Bedeutung“ („sens“ şi „semnificaţie“). Aceasta nu ne interesează aici.

[6] Exemplele sînt împrumutate din lucrările lui Frege.

Negaţia „conţinutului lui A", adică gîndul (sau faptul, starea de lucruri) că „polii magnetici opuşi *nu* se atrag între ei" — altfel spus: non-atragerea polilor magnetici diferiţi — este notată de Frege cu ajutorul unei liniuţe verticale numită „linia negaţiei", după cum urmează:



iar *asertarea* acestui gînd negativ —o judecată negativă — se va nota, desigur:



Fie acum A şi B abrevieri pentru două „conţinuturi posibile de judecată"[8]. Ceea ce se numeşte astăzi „implicaţia materială" este notată de Frege în felul următor (în cazul simplului gînd):



[7] Frege subliniază că A este simplu gînd, conţinut de judecată, dar nu încă judecată. Judecata este — la Frege — recunoaşterea adevărului unui gînd; ea se constituie deci prin aplicarea, în final, a operaţiei de asertare la „conţinutul judicabil", la gînd. Asertarea nu este o operaţie de acelaşi gen cu operaţiile logice propriu-zise cum ar fi negaţia, conjuncţia ş.a. Ea reprezintă asentimentul subiectului care judecă la conţinutul judicabil, punerea lui ca adevărat, printr-o „atitudine propoziţională" (cum am spune astăzi) ireductibilă.

[8] Îl urmăm aici pe Frege (*Begriffsschrift*, secţiunea 1). În prima secţiune, Frege face distincţia importantă între cele două tipuri de simboluri logice: variabile şi constante, între „*cele care pot fi considerate că înseamnă diferite lucruri* şi *cele care au un sens pe deplin determinat*". În exemplele de mai sus, A nu era o variabilă, dar înţelesul ei era precizat în context. Literele A şi B în toate exemplele ce urmează trebuie sau cel puţin pot fi privite ca variabile. (Trebuie subliniat că înţelesul termenului „variabilă" va fi precizat şi corectat în lucrările ulterioare ale lui Frege, „variabilă" putînd însemna lucruri diferite).

respectiv, în cazul asertării:



Această notație corespunde formulei

$$(B \rightarrow A)$$

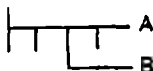
cu care sîntem familiarizați din lucrările mai recente de logică.

Verticala care unește cele două orizontale este numită de Frege „linie condițională" („Wenn-So-Strich").

Judecata „A sau B" (disjuncția neexclusivă) se definește ca:



iar judecata „A și B" (adică $\vdash \sim (B \rightarrow \sim A)$ ca:



Mai departe, Frege introduce notații pentru funcții de un argument, de două argumente:

$$\Phi\ (A),\ \Psi\ (A,\ B)\ \text{etc.}$$

Judecata că funcția Φ (A) este satisfăcută pentru toate argumentele sale este notată de Frege cu ajutorul unei concavități în care figurează ceea ce astăzi s-ar numi „variabila legată".



ceea ce ar corespunde aproximativ formulei:
(a) Φ(a)

Cuantorul existențial[9] este definit pe baza celui universal. Judecata „există Φ-uri" este simbolizată:

Φ(a)

(într-adevăr: (∃a)Φ(a) „înseamnă că ~(a)~Φ(a)).

Judecata de forma „toți X sînt P" (forma pe care Russell a numit-o mai tîrziu „implicație formală" și care transcrie în formă generalizată structura judecăților universal-afirmative din silogistica aristotelică) se notează așadar în felul următor:

P(a)
X(a)

Simbolismul lui Frege este interesant în mai multe privințe. În primul rînd, așa cum observă J. M. Bochenski, el premerge notația poloneză („die später in Anlehnung an Frege durch Łukasiewicz geschaffene Symbolik")[10]. După cum se știe, Łukasiewicz scrie functorul (semnul funcției) înaintea semnelor argumentelor, ceea ce permite să se elimine parantezele.

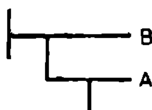
Avem impresia că notația lui Frege este totuși mai sugestivă decît cea a lui Łukasiewicz (deși mai puțin economică), prin faptul că structura unei formule, împărțirea ei, precum și a fiecăreia dintre subformulele componente de un ordin arbitrar în antecedent și consecvent poate fi sesizată imediat, în mod vizual.

De asemenea, este interesant că Frege nu introduce simboluri cu totul noi pentru „functorii" definiți pe baza implicației și negației; scrierea sa ne permite să considerăm notația pentru „sau" „și" etc. atît ca simbol nou introdus, abreviativ pentru ceea ce

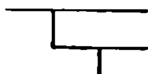
[9] Denumirea de „cuantori" a fost introdusă mai tîrziu (1887) de către Peirce. Peirce și Mitchell au descoperit concomitent cuantorii, fără a cunoaște lucrările lui Frege. Prin ei, *via* Peano, a intrat în circuitul logicii teoria cuantorilor (cf. J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*).

[10] J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*, p. 358.

se definește în termeni de implicație și negație, cît și ca definiție explicită. De exemplu:



se poate citi ca „dacă non-A atunci B", convenind să înțelegem ca și înainte notația lui Frege ca incluzînd liniuța negației (afectînd pe A) și linia „condiționalului" care leagă non-A de B. Dar — aici intervine elementul nou — formula se poate citi direct: „A sau B", deoarece



poate fi considerat ca un simbol simplu pentru „sau". Această ambiguitate grafică este o particularitate a simbolismului lui Frege care nu poate fi regăsită în simbolismul lui Łukasiewicz sau al lui Peano-Russell etc., ea datorîndu-se caracterului într-adevăr „ideografic" al semnelor utilizate.

Simbolismul dificil din *Begriffsschrift* nu poate fi făcut responsabil în exclusivitate pentru neînțelegerea generală a operei lui Frege. Acest factor s-a adăugat altor motive, mai substanțiale.

Ocupîndu-se de „motivele subaprecierii scrierilor lui Frege", P. H. Nidditch alătură celui de mai sus, altele trei:

(1) Faptul că, în general, „acei ce se ocupau de filosofie erau îndemnați să nu se apropie de o întreagă masă de semne — și cu atît mai puțin să o parcurgă —, cînd scopul acestei mase de semne era de a sprijini o teorie a filosofiei — în cazul de față, a filosofiei matematicii. Convingerea lor era (și este) că un argument pro sau contra unei atari teorii trebuia prezentat în limbajul cotidian, deoarece valoarea teoriei depinde de punctele ei de pornire și de adevărul opiniilor care stau în spatele acestora; ar fi însă imposibil ca acestea să se sprijine pe ceva înăuntrul

unei structuri de tip matematic, ele se pot sprijini numai pe argumente exterioare structurii"[11].

La observaţia lui Nidditch se cuvine a fi rataşată explicaţia mai profundă a lui Heinrich Scholz — unul din primii istorici ai logicii care a înţeles adevăratele dimensiuni ale operei lui Frege. H. Scholz relevă rolul nefast al climatului filosofic dominant în Germania şi face responsabilă pentru ignorarea operei lui Frege tirania filosofiei lui Kant şi Hegel. „...Influenţa criticii kantiene a fost atît de mare încît efectiv ea determină în mod categoric pînă la această oră filosofia germană. De la *Kant*, filosofia germană în ansamblu s-a îndepărtat atît de mult de orice efort în direcţia unei logici leibniziene încît ea nu a putut găsi o cale de acces la *Frege*". Influenţa lui Hegel a fost de asemenea dăunătoare, ea făcînd să se renunţe la abordarea matematicii şi a gîndirii matematice[12].

(2) „O altă cauză — scrie Nidditch — rezida în faptul că teoria lui Frege era atît de surprinzătoare şi atît de îndepărtată de teoria probabilă încît păreau să existe prea puţini sorţi ca efortul de a urmări în amănunt deducţiile prezentate să fie răsplătit"[13]. Surpriza pe care o provoca teoria lui Frege trebuie desigur raportată şi ea la mediul filosofic-cultural în care creează marele logician. Germania filosofiilor de catedră, a neo-kantianismului, a logicii psihologiste şi empiriste nu putea accepta nici logicismul leibnizian al lui Frege, nici ideea caracterului obiectiv al adevărului.

Şi în sfîrşit:

(3) „...Ceea ce făcea Frege se abătea de la cărarea cea dreaptă şi strîmtă: nu era matematică absolut normală, nu era filosofie absolut normală şi nu era logică absolut normală. Nu era matematică normală; erau fundamentele matematicii. Nu era filosofie normală: era filosofia matematicii, profesată de un cu-

---

[11] P. H. NIDDITCH, *The Development of Mathematical Logic*, Routledge & Kegan Paul, London, 1962, p. 61.

[12] HEINRICH SCHOLZ, „Die klassische deutsche Philosophie und die neue Logik". Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VIII, Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique, Paris, 1935 („Actualités Scientifiques et Industrielles", nr. 395), p. 3.

[13] P. H. NIDDITCH, *op. cit.*, p. 61.

noscător de prim rang al matematicii. Şi nu era logică normală: nu era algebra logicii («Normal» este luat în raport cu perioada 1875—1900)"[14].

Nici prin obiect, nici prin conţinut, nici prin metodă de expunere şi formă exterioară lucrările lui Frege nu erau adaptate la mediu, la mentalitatea şi aşteptările comunităţii ştiinţifice din care făcea Frege parte[15].

Credem că un rol esenţial în soarta operei lui Frege l-a avut caracterul filosofiei sale, orientarea sa în direcţia realismului moderat, cu unele elemente de materialism spontan; această tendinţă neostentativă, mai curînd implicită şi aplicată strict la obiectul cercetării era de natură să stîrnească dacă nu ostilitate, atunci cel puţin o sinceră şi profundă neînţelegere sau lipsă de interes[16].



După o serie de articole care reiau şi aprofundează motivele din *Begriffsschrift*, Frege dă la iveală în 1884 cartea sa *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (Fundamentele aritmeticii. O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr)*, Breslau, 1884.

Cartea lui Frege marchează un moment crucial în fundamentele matematicii. Într-o admirabilă împletire a analizei logice şi filosofice — care va fi adîncită şi formalizată ulterior, în *Grundgesetze der Arithmetik* — Frege dezvoltă programul logicist de fundare a aritmeticii. Dacă „Begriffsschrift" aplica noul calcul „ideografic" pentru deducerea unor teoreme matematice (din teo-

[14] P. H. NIDDITCH, *op. cit.*

[15] Nu trebuie pierdut din vedere că însăşi algebra logicii nu era acceptată ca „logică normală" de imensa majoritate a logicienilor şi filosofilor germani; ea era cunoscută şi preţuită de cîţiva matematicieni, elaborată de o infimă minoritate (Ernst Schröder) şi, în sfîrşit, nu se întrevedea posibilitatea aplicării ei în studiul fundamentelor matematicii. Nu puţini erau matematicienii care aveau rezerve serioase faţă de această disciplină. Nici-Matematică-Nici-Logică! — Ceea ce făcea Frege era deci de două ori „anormal"!

[16] Frege însuşi se plînge nu o dată de această neînţelegere sau ignorare tacită. Vezi, de exemplu, Introducerea la *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, 1893.

ria şirurilor), *Fundamentele aritmeticii* pun însăşi problema naturii propoziţiilor aritmetice şi a conceptului de număr.

În centrul criticii lui Frege se află concepţia lui Kant, după care legile aritmeticii ar fi adevăruri sintetice apriorice, precum şi empirismul lui Mill. Frege respinge teza că legile aritmeticii ar fi adevăruri inductive, „legi ale naturii" şi contestă punerea pe acelaşi plan a adevărurilor analitice ale aritmeticii cu adevărurile sintetice ale geometriei.

Leibniz încercase şi el să demonstreze propoziţiile aritmetice, plecînd de la definiţii. Programul lui Frege este mai complex. Logicismul modern merge mai departe în afirmarea răspicată a caracterului analitic al propoziţiilor matematicii.

Propoziţiile aritmetice sînt — după Frege — apriorice şi analitice; totodată, ele nu au structura judecăţilor categorice *in esse*. Termenul „aprioric" are însă la Frege o altă rezonanţă decît la Kant, el nefiind legat de o „răsturnare copernicană" a raportului dintre subiectul cunoscător şi obiectul cunoaşterii şi nefiind legat de doctrina după care subiectul cunoscător creează, dacă nu obiectul, atunci cel puţin Obiectul-Aşa-Cum-Este-El-Cunoscut. Pe de altă parte, analiticitatea propoziţiilor aritmetice nu mai este de natura inerenţei necesare a predicatului la subiect.

Spunînd că propoziţiile asertate ale aritmeticii au un caracter analitic, Frege are în vedere faptul că ele sînt *adevăruri logice*. Caracterul lor logic nu este însă evident. De aici, încercarea de a demonstra această afirmaţie.

Tentativa de a releva adevărurile aritmeticii în calitate de adevăruri logice are la Frege o bază incomparabil mai solidă decît la Leibniz. Se afirmă nu numai că aritmetica este o ştiinţă strict deductivă, ale cărei adevăruri decurg în formă pură din definiţii admise iniţial, dar se preconizează totodată să fie explicitată logica după care se desfăşoară demonstraţiile, se cer a fi precizate regulile de deducţie pe care le folosim. În al doilea rînd, Frege susţine că înseşi noţiunile aritmeticii sînt în fapt noţiuni logice. Scopul principal este deci definirea conceptului de număr (începînd cu definirea numărului natural) şi rezultatul nou este acela că definiţiile aritmeticii nu folosesc decît termeni logici: *concept, extensiune a conceptului, relaţie, obiect, „şi", „dacă . . ., atunci", „nu", „toţi", „există cel puţin un . . ."* ş.a.

Principiile după care s-a călăuzit Frege sînt următoarele: „... Trebuie să distingem întotdeauna în mod riguros psihologicul de logic, subiectivul de obiectiv;

semnificația cuvintelor nu trebuie căutată în izolarea lor, ci numai în contextul propoziției;

„trebuie avută în vedere distincția dintre concept și obiect"[17].

Sensul primului principiu este clar — el situează de la bun început demersul pe planul unei logici antipsihologiste, care cercetează nu reprezentările, imaginile, ideile individuale din mintea omului, ci conceptul ca entitate obiectivă.

Al doilea principiu este justificat de Frege prin conexiunea lui firească cu primul, căci — spune dînsul — „cînd nu se respectă al doilea principiu ne vedem siliți să acceptăm în calitate de semnificații ale cuvintelor imagini mentale sau acte ale psihicului individual, încălcînd astfel primul principiu"[18].

Principiul citat este aplicat de Frege pe scară largă în *Grundlagen der Arithmetik*, pentru detectarea înțelesului cuvintelor, în special al numeralelor, și pentru a înlătura suprapunerile de sensuri sau aparențele înșelătoare care ascund semnificația reală a cuvintelor.

Frege dovedește o subtilitate inegalabilă, de filosof analist (în sensul contemporan al cuvîntului) în elucidarea sensului propozițiilor din limbajul obișnuit, în rîndul cărora se numără și propoziții de „aritmetică aplicată" (de ex.: „Pămîntul are doi poli", „un măr și încă un măr fac două mere")[19], precum și a sensului propozițiilor pur aritmetice. Principiul își găsește totodată o aplicație în unul din instrumentele esențiale ale cercetării lui Frege — „definițiile prin abstracție", cum au fost ele numite mai tîrziu.

În sfîrșit, al treilea principiu — distincția între concept și obiect — atinge însuși miezul logicii lui Frege, deoarece — se poate spune — sistemul său logic se axează pe această distincție teoretică, dezvoltată tocmai în articolele din culegerea de față.

[17] FREGE, *op. cit.*, Introducere, p. X, 1950. În volumul de față, p. 37.

[18] *Ibid.*

[19] Este de văzut distincția dintre aceste două propoziții. Prima poate fi considerată o propoziție factuală propriu-zisă în timp ce a doua este o aplicație și o consecință a unui adevăr aritmetic.

Care sînt rezultatele principale ale analizei lui Frege?

Frege respinge anumite opinii despre număr şi adevăruri aritmetice, opinii provenite din surse filosofice variate. De exemplu, potrivit unei variante a empirismului, definiţiile numerelor exprimă, fiecare în parte, fapte observate, adevărurile aritmeticii fiind „legi ale naturii", adevăruri inductive (J. St. Mill); după Kant, dimpotrivă, legile aritmeticii ar fi sintetice — *a priori*. Ambele soluţii îi apar lui Frege nesatisfăcătoare.

Frege subliniază că numărul nu este obiect al psihologiei, ci o entitate obiectivă, la fel cum în genere semnificaţia fiecărui cuvînt — dacă ea există — este obiectivă.

Înţelegînd obiectivitatea — ca independenţă faţă de senzaţie şi de reprezentarea psihică individuală, dar nu ca independenţă faţă de raţiune[20], Frege face o profesiune de credinţă *raţionalistă*, delimitîndu-se net de empirişti. Antipsihologismul lui Frege este de nedespărţit de anti-empirismul său.

Prin „raţiune", Frege nu are în vedere gîndirea individuală şi subiectivă, sau în genere procesele psihice ţinînd de sensibilitate sau de intelect. Pentru Frege, procesul gîndirii individuale diferă de la individ la individ, şi ca atare nu poate fi chezaş al obiectivităţii. Raţiunea — lasă a se înţelege Frege, deşi nu într-un mod prea desluşit — este elementul comun, de gen, inerent tuturor gîndirilor individuale, este ceea ce permite comunicarea lingvistică umană eficientă, înţelegerea propoziţiilor în acelaşi mod, în pofida diversităţii reprezentărilor individuale. Raţiunea este tocmai depăşirea subiectivităţii în intersubiectivitate şi în obiectivitatea deplină a adevărului.

La adevăr ajungem numai prin gîndire. Pentru Frege, gîndirea este garantul obiectivităţii.

Raţionalismul lui Frege nu este al unui idealist obiectiv şi nici al unui neokantian pentru care obiectivitatea se rezumă la intersubiectivitate, consens uman; adevărul propoziţiei este independent de om şi omenire. Idealismul obiectiv, dar nu neapărat şi raţionalismul transformă *gîndirea* sau *gîndul* în factor onto-

---

[20] Termenul de „raţiune" se întîlneşte mai ales în *Die Grundlagen der Arithmetik*. În lucrările ulterioare, Frege vorbeşte numai despre „gînd" (Gedanke) şi „gîndire" (Denken). Gîndirea însă — spre deosebire de gînd — este în afara logicii.

logic, în *lume*, sau în *creator de lume*, suflet universal al lumii etc.

Raţionalismul lui Frege implică însă numai un realism moderat. Ontologia lui Frege — dacă se poate vorbi la modul propriu despre ontologie — este *formală* şi nu *filosofică*. Ea ar consta dintr-o serie de afirmaţii despre anumite entităţi abstracte („obiecte", „funcţii", „concepte", „relaţii") şi dintr-o teorie logico-matematică despre raporturile generale ale acestor entităţi. Această teorie prezintă desigur interes filosofic şi *poate* căpăta o coloratură pronunţat filosofică, însă, aşa cum se înfăţişează ea, nu este încă filosofică. Ea este suficient de incompletă pentru a nu intra în raza curentelor filosofice.

În spiritul unui raţionalism consecvent, dar unilateral, care face abstracţie de geneza ideilor abstracte, de legătura lor cu activitatea subiectului, Frege afirmă în *Fundamentele aritmeticii* că obiectivitatea este independentă faţă de senzaţii, dar nu şi faţă de raţiune; afirmaţia are la Frege un sens nu ontologic, ci gnoseologic: raţiunea deceleează obiectivitatea, o descoperă *acolo unde ea este*, o pune în joc.

Contextul în care apare afirmaţia de mai sus arată că Frege avea în vedere infirmarea psihologismului plat, a ideii că gîndirea este pur subiectivă. Frege nu neagă subiectivitatea procesului individual de gîndire, dar susţine că logica şi matematica nu au de-a face cu gîndirea subiectivă, ci cu gîndul-obiectiv, deci cu *conţinutul obiectiv al gîndirii*: „Eu fac o distincţie între ceea ce este obiectiv (das Objective) şi ceea ce este imediat sesizabil, spaţial sau real. Axa Pămîntului şi centrul de gravitate al sistemului solar sînt obiective, dar eu n-aş spune că sînt reale, aşa cum real este Pămîntul însuşi. Vorbim adesea despre ecuator ca despre o linie imaginară; ar fi însă fals să spunem că este o linie imaginată; ea nu provine din gîndire, nu este rezultatul unui proces psihic, gîndirea nu face decît să o recunoască, să o conceapă ca atare. Dacă a fi recunoscut ar însemna a fi generat, atunci nu am putea afirma nimic pozitiv despre ecuator, referitor la perioada care precede această pretinsă geneză"[21].

---

[21] În volumul de faţă, pp. 71—72.

La fel de obiective, dar nu reale, adică lipsite de spaţio-temporalitate, senzorialitate, realitate sînt — potrivit lui Frege — numerele. Obiectivitatea lor se *manifestă* în adevărul obiectiv al propoziţiilor.

Numerele sînt obiecte, dar nu pentru simţuri, întrucît ele nu sînt obiecte materiale, adică concret-senzoriale, ci ideale; pe de altă parte însă, nu sînt nici creaţii ale conştiinţei, făpturi subiective.

Definiţia numărului se obţine în etape. Mai întîi, Frege stabileşte faptul că numerele — contrar aparenţei — nu exprimă proprietăţi ale obiectelor; dacă analizăm enunţurile numerice, constatăm că în ele numerele nu se atribuie nemijlocit obiectelor, ci se atribuie *conceptelor*. De exemplu, în propoziţia: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai", numărul patru este atribuit conceptului „cal care trage trăsura împăratului".

Obiectivitatea acestor enunţuri numerice derivă din obiectivitatea conceptului: „Dacă deci conceptul este ceva obiectiv, o aserţiune despre acesta poate conţine de asemenea ceva faptic".

Pornind de la această premisă, Frege stabileşte prin intermediul unei minuţioase analize definiţia logică a numărului şi sugerează modul în care proprietăţile principale ale numerelor, relaţiile dintre ele, legile operaţiilor cu numere naturale pot fi transcrise, definite, prin intermediul unor noţiuni pur logice, pornind de la definiţiile introduse mai sus.

În prelungirea acestei propuneri, Frege îşi exprimă convingerea că adevărurile aritmeticii sînt la rîndul lor analitice *a priori*. Concluzia, după opinia autorului *Fundamentelor aritmeticii* apărea ca „foarte probabilă".

Însă ea trebuie demonstrată, pas cu pas.



Fundamentele aritmeticii nu făceau decît să schiţeze programul de fundare a aritmeticii pe baza logicii. Traducerea în practică a acestui program impunea formalizarea integrală a logicii şi a aritmeticii, prezentarea lor sub forma unui sistem deductiv formal, axiomatizat. Limbajul simbolic, „ideografic", trebuia să confere programului logicist rigoarea necesară, oferind un mijloc efectiv de control al justeţei tezei logiciste.

Acestui obiectiv îi este consacrată opera capitală a lui Frege, *Legile fundamentale ale aritmeticii*[22]. Sinteză a eforturilor de o viață întreagă ale lui Frege, reîntîlnim în ea toate temele majore ale filosofiei fregeene, așa cum ele se conturau încă în „Begriffsschrift" și așa cum au fost ele dezvoltate în *Fundamentele aritmeticii* și în articolele ulterioare.

În perioada 1884—1893, cînd pregătește primul volum din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, Frege dezvoltă totodată într-o serie de articole[23], concepțiile sale în două domenii hotărîtoare:

1. Teoria despre funcție, concept și obiect.
2. Semantica logică.

Există o intimă legătură între concepția logico-filosofică despre funcție, concept și obiect, semantica și sistemul formal al lui Frege.

Centrul spre care converg toate aceste linii de forță îl constituie sistemul formal care primește denumirea de *ideografie, scriere conceptuală:* „Begriffsschrift". Pe baza a cinci axiome, a unor idei logice primitive, a unor reguli de definiție și a unor reguli de deducție, Frege derivă principalele teoreme ale aritmeticii și definește noțiunile de bază ale aritmeticii în calitate de construcții logice.

În *Introducerea* la primul volum, Frege făcea o prezentare generală a conținutului cărții sale și a modului de expunere adoptat, subliniind elementele noi și modificările introduse.

Avertizat de indiferența și neînțelegerea cu care fuseseră întîmpinate contribuțiile sale anterioare, Frege era conștient că receptarea cărții sale va fi îngreunată nu numai de dificultățile pe care le întîmpină lectura unui text matematic, ci și de climatul subiectivist și formalist dominant în logica și matematica vremii sale.

---

[22] *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*, Band I, Jena, 1893; Band II, 1903. Reeditate la Georg Olms Verlag, Hildesheim, în 1962.

[23] „Function und Begriff", Jena, 1891; „Über Begriff und Gegenstand", 1892; „Über Sinn und Bedeutung", 1892; „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*" (1895) ș.a.

Contestînd formalismul matematic (în sensul prehilbertian al cuvîntului), Frege dezvoltă ideea că matematica nu are ca obiect semnele şi operaţiile cu semne, ci ceea ce aceste semne exprimă; definiţiile nu au putere creatoare: ele nu generează obiecte noi, nu au puterea miraculoasă de a înzestra obiectele existente cu proprietăţi şi relaţii noi.

Divergenţa dintre concepţiile lui Frege şi cele psihologiste porneşte de la concepţia asupra adevărului. „Pentru mine — scria profesorul de la Jena — ceea ce este adevărat constituie ceva obiectiv şi independent de subiectul care judecă; pentru logicienii psihologişti lucrurile nu stau la fel. Ceea ce domnul B. Erdmann numeşte «certitudine obiectivă» este doar un asentiment general obţinut din partea subiecţilor care judecă şi, ca atare, nu este independentă faţă de aceştia, ci este susceptibilă să se altereze, odată cu structura psihicului lor“[24].

Frege privea logica psihologistă ca pe enorma povară pe care concepţia sa logică trebuia s-o dea la o parte, pentru a răzbi la suprafaţă şi a dobîndi recunoaşterea generală.

În Introducerea la primul volum, Frege îşi manifestă explicit îngrijorarea în legătură cu eventualele critici pe care le putea suscita cartea sa, date fiind aparenta lipsă de accesibilitate a cărţii sale şi mai ales rezistenţa pe care vor avea să le întîmpine concepţiile sale filosofice. Privitor la trăinicia sistemului formal însă, Frege nu avea ezitări şi, aruncînd mînuşa, făcea din „demonstraţiile legilor fundamentale ale numărului“ o piatră de încercare a convingerilor sale logice[25]. Optimist, el scria: „*Prima facie*, este improbabil ca o asemenea structură să fi fost ridicată pe o temelie nesigură sau defectuoasă. Oricine împărtăşeşte alte convingeri nu are decît să încerce a ridica o structură asemănătoare pe aceste temelii; cred că el îşi va da seama că ea nu funcţionează sau cel puţin nu funcţionează atît de bine. Ca infirmare, în această privinţă n-aş putea recunoaşte decît o demonstraţie efectivă dată de cineva că un edificiu mai bun, mai durabil, poate fi ridicat pe temelia altor convingeri fundamentale, sau, dacă nu, demonstraţia faptului că principiile mele duc la concluzii evident false. Dar nimeni nu va fi în stare să facă

---

[24] *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Introducere, p. XVIII.
[25] *Ibidem*, p. XXVI.

aceasta. Fie atunci ca, deşi cu întîrziere, cartea mea să contribuie la o reînnoire a logicii"[26].

Aceste rînduri erau scrise în Introducerea la primul volum, în iulie 1893. Cu un deceniu mai tîrziu, în octombrie 1902, cînd cincuagenarul Frege adăuga o neprevăzută postfaţă (Appendix) la al doilea volum din *Grundgesetze der Arithmetik*, pe atunci aflat sub tipar, situaţia se schimbase cu desăvîrşire, luînd o întorsătură uluitoare.

Mai întîi, se găsise cititorul avizat, atent, pe care şi-l dorise atît de mult, de-a lungul unui sfert de veac de activitate ştiinţifică, solitarul profesor de la Jena. În Introducerea la primul volum, Frege scrisese: „Ultima mea speranţă este ca cineva să aibă suficientă încredere în problematica tratată spre a considera profitul intelectual drept o recompensă îndestulătoare şi ca el să facă public rezultatul examinării sale minuţioase. Nu [vreau să spun] că numai o recenzie laudativă m-ar putea satisface; dimpotrivă, aş prefera un atac extrem de informat unui elogiu făcut în termeni generali şi care nu ajunge la rădăcina lucrului"[27].

Acest cititor avizat se numea Bertrand Russell. Asistase la Congresul Internaţional de Filosofie de la Paris (1901) şi fusese impresionat de comunicarea prezentată de Peano; lectura lucrărilor lui Peano îl determinase apoi să se familiarizeze cu lucrările lui Frege. Însuşindu-şi programul logicist, Russell a supus unei examinări într-adevăr minuţioase opera lui Frege. Lectura cărţilor lui Frege i-a lăsat o impresie neştearsă şi a fost unul din evenimentele memorabile ale vieţii sale intelectuale. Russell este, probabil, primul gînditor care a sesizat la justa lor valoare contribuţiile logicianului german şi le-a popularizat, înfrîngînd consensul tăcerii căruia îi căzuse victimă Frege.

Dar — ce ironie! — tocmai triumful lui Frege, începutul de notorietate tîrzie pe care şi l-a cîştigat, este legat de cea mai mare decepţie a vieţii sale, şi anume de dezvăluirea unui viciu fundamental al întregului sistem, de descoperirea unui paradox înăuntrul sistemului.

Provocarea aruncată de Frege şi convingerea că „nimeni nu

---

[26] *Ibidem.*
[27] *Ibidem*, p. XII.

va fi în stare" să demonstreze că principiile sale ar duce la concluzii evident false s-au ciocnit de evidenţa neaşteptată în sensul contrar.

Proporţia evenimentului depăşeşte însă pînă şi cadrul operei lui Frege. Descoperirea paradoxului afectează nu numai sistemul formal fregean, ci subminează înseşi fundamentele evidente, incontestabile de pînă atunci ale logicii şi ale teoriei mulţimilor. Chestiunea fundamentelor *matematicii*, în general, se pune într-un mod nou, de-a dreptul dramatic.

Perspectiva relativistă se încetăţeneşte virtual în matematică, încă din prima jumătate a secolului al XIX-lea, odată cu descoperirea geometriei lui Lobacevski-Bolyai. Dar relativismul nu fusese întovărăşit de scepticism şi de fenomenele de criză filosofică care agitau ştiinţele naturii spre sfîrşitul secolului XIX, în urma descoperirilor epocale din fizică.

Pînă atunci, totul lăsa să se creadă că explorarea fundamentelor ştiinţelor matematice constituie un *marş* triumfal. E drept că drumul era presărat de jertfe individuale, că cerea îndrăzneală revoluţionară din partea puţinilor savanţi care întreprindeau acest demers bizar, ciocnindu-se de indiferenţa sau opiniile conservatoare ale majorităţii savanţilor; însă nici o piedică teoretică nu se întrezărea în înfăptuirea programului de aşezare a întregului edificiu matematic pe temelii inzdruncinabile. Primul pas — atît de promiţător — de reducere a problemei fundării întregii matematici, inclusiv geometria, la problema fundării aritmeticii fusese deja înfăptuit, iar eforturile disparate ale adepţilor teoriei mulţimilor şi ale logicismului concurau la atingerea ţelului final.

Cît priveşte logica, în pofida controverselor filosofice care o agitau, în pofida opoziţiei dintre logica tradiţională şi „logica nouă" a lui Boole, Schröder, Frege, Peano, nimic nu părea să anunţe că înseşi temeliile ei, presupoziţiile sale evidente, vor fi puse în discuţie, vor sta sub semnul întrebării, că în loc de a aduce o nouă certitudine, logica nouă va inscăuna „permanenţa provizoratului".

Într-un asemenea climat de calmă speranţă, descoperirea unui paradox — comunicat de Russell într-o scrisoare adresată lui Frege — a explodat ca un trăznet din senin.

Reacţia lui Frege la descoperirea paradoxului, vădind perplexitatea autorului, este semnificativă. Ea diagnostichează fără greş existenţa unei crize generale a fundamentelor. Este marcat sfîrşitul unei epoci şi începutul alteia noi, de criză. Comentariul lui Frege merită a fi citat *in extenso:* „Cu greu i se poate întîmpla unui autor ştiinţific ceva mai neplăcut decît zdruncinarea unuia din stîlpii edificiului său, după ce lucrarea a fost terminată. În această situaţie am fost pus în urma unei scrisori a d-lui Bertrand Russell, tocmai atunci cînd tipărirea acestui [al doilea] volum se apropia de sfîrşit. Este vorba de Legea mea Fundamentală (V). Nu mi-am ascuns niciodată faptul că ea este lipsită de evidenţa pe care o au celelalte legi şi care trebuie cerută, în fapt, unei legi a logicii; într-adevăr, am şi subliniat această lacună în Introducerea la primul volum (pp. 3—4). Aş fi renunţat bucuros la acest stîlp de sprijin, dacă aş fi cunoscut un înlocuitor al său. Chiar şi acum eu nu văd cum aritmetica poate fi fundamentată în mod ştiinţific, cum numerele pot fi concepute ca obiecte logice şi supuse studiului, dacă nu ne este îngăduit — cel puţin în mod condiţionat — să trecem de la un concept la extensiunea lui. Este oare întotdeauna permis să vorbim despre extensiunea unui concept, despre o clasă? Iar dacă nu, cum recunoaştem excepţiile? Putem oare deduce întotdeauna din coincidenţa extensiunii unui concept cu extensiunea altui concept că orice obiect care cade sub primul concept cade, de asemenea, sub cel de-al doilea? Iată problemele ridicate de comunicarea d-lui Russell.

Solatium miseris, socios habuisse malorum. Am şi eu această consolare, dacă într-adevăr este o consolare; oricine a făcut uz în demonstraţiile sale de extensiuni ale conceptelor, de clase, mulţimi*, se află ce-i drept, în aceeaşi situaţie. Nu este vorba anume de metoda mea specială de aşezare a fundamentelor, ci de faptul dacă în genere este posibilă o fundamentare logică a aritmeticii“[28].

În acelaşi Appendix, Frege explora cu luciditate toate solu-

* „Sistemele“ domnului R. Dedekind se înscriu şi ele la aceeaşi rubrică (nota lui Frege).

[28] *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, Jena, 1903, Appendix, p. 253.

țiile posibile, propunea o modificare (care ulterior s-a dovedit nesatisfăcătoare) și conchidea totuși într-o manieră relativ optimistă: „Problema primordială a aritmeticii este: în ce mod trebuie să concepem obiectele logice și, în particular, numerele? Prin ce mijloace sîntem îndreptățiți să recunoaștem numerele ca obiecte? Chiar dacă această problemă nu este rezolvată în măsura în care, atunci cînd am scris acest volum, credeam că ar fi, eu nu mă îndoiesc totuși că drumul către soluție a fost descoperit“[29].

Dezvoltarea ulterioară — și foarte rapidă — a cercetărilor în domeniul fundamentelor matematicii a depășit cadrul statornicit de Frege. Programul logicist a fost preluat de către Russell și Whitehead, continuatorii lui Frege și Peano. În același timp, Zermelo a dat prima axiomatizare a teoriei mulțimilor, Hilbert a preconizat programul său formalist iar intuiționismul lui Brouwer a abandonat legea terțiului exclus, în tot atîtea tentative separate de soluționare a problemelor fundamentale.

Frege n-a abandonat încercarea de a găsi ieșirea din impas și n-a renunțat să se mai ocupe de fundamentele aritmeticii. S-a spus despre el că, asemenea pitagoreicilor după descoperirea numărului irațional, s-ar fi refugiat în pura geometrie. Manuscrisele postume — editate astăzi — dezmint această părere; Frege a continuat să caute o soluție, dar spre sfîrșitul vieții s-a văzut silit să recunoască irealizabilitatea programului logicist și a încercat să găsească o fundare geometrică a teoriei numerelor.

În ultimele două decenii ale vieții sale, Frege s-a ocupat totodată de fundamentele geometriei, criticînd abordarea hilbertiană, polemizînd împotriva filosofiei formaliste a matematicii[30].

Dar Frege nu a părăsit nici preocupările de logică pură. Spre sfîrșitul vieții sale, Frege a publicat trei articole: „Gîndul“, „Negația“ și „Gîndurile compuse“[31], în care dezvoltă teoria sa *logică*,

---

[29] *Ibidem*, p. 265.

[30] *„Über die Grundlagen der Geometrie“* (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 15, 1906, pp. 293—309, 377—403, 423—430).

[31] „Der Gedanke“, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 1 (1918—1919), pp. 58—77; „Die Verneinung“, Beiträge..., 1, pp. 143—157; „Gedankengefüge“, Beiträge..., 3 (1923—1926), pp. 36—51.

accentuînd elementele ei antikantiene şi realiste. Frege a rămas pînă la sfîrşitul vieţii sale adeptul aceleiaşi filosofii a logicii. Consecvenţa concepţiilor sale logico-filosofice îl izola, în epoca sa. Astăzi, redescoperim cu un interes viu concepţia fregeană despre logică, originală, fecundă şi stimulatoare.

Dacă în 1925, cînd a încetat din viaţă, Frege era puţin cunoscut, iar logica lui Russell monopoliza atenţia logisticienilor, un reviriment avea să se producă mai tîrziu. Pregătită lent — îndeosebi sub egida şcolii logice de la Münster închegată de Heinrich Scholz — această reîntoarcere la Frege a devenit o evidenţă în zilele noastre.

Dar înseamnă acest „înapoi la Frege", acest neofregeanism, un regres? Este apanajul marilor gînditori de a investi în creaţia lor mai mult decît poate să absoarbă o singură generaţie. Gîndirea lui Frege stimulează mersul înainte al gîndirii logico-filosofice. Crepusculul neopozitivismului reliefează viu — prin contrast — viabilitatea unor jaloane ale filosofiei lui Frege, originalitatea ei.

Din ansamblul de idei al acestei filosofii, se detaşează în mod special concepţia despre funcţii şi obiecte, legată de metoda analizei logice, de semantică şi ontologia subiacentă. Cele trei articole din volumul de faţă, „Funcţie şi concept", „Despre concept şi obiect", „Ce este o funcţie?" pun în joc tocmai această problematică.



Funcţie şi obiect. Luînd ca punct de plecare funcţiile de un singur argument din matematică, Frege precizează înţelesul noţiunii de „funcţie", spulberînd o confuzie frecvent întîlnită: o funcţie de x nu este o expresie care conţine litera x, ci este ceea ce o atare expresie desemnează. În expresia unei funcţii, litera x nu semnifică un număr variabil; nu există numere variabile. Literele x, y..., utilizate ca variabile indică în mod indefinit numere.

Cînd spunem: „y este funcţie de x", presupunem o lege de corelare a unui obiect arbitrar, de obicei un număr indicat în mod indefinit de către „x", cu un anumit obiect, pe care îl indică în mod indefinit „y".

Să considerăm expresia matematică a unei funcții, de exemplu:

„$x^2 + 3x$"

Ca însăşi litera x, expresia „$x^2 + 3x$" nu semnifică un anumit număr, ci indică în mod indefinit elementele unei anumite clase de numere. Dacă însă in locul lui „x" punem numele unui număr, de exemplu „1" (înlocuirea în cadrul expresiei fiind făcută în toate locurile în care figurează „x")[32], expresia obținută:

$$1^2 + 3 . 1$$

va desemna, de data aceasta, un obiect determinat, şi anume numărul 4.

Trecînd de la expresia „$x^2 + 3x$" la expresiile „$1^2 + 3.1$", „$2^2 + 3.2$" etc., am trecut — spune Frege — de la un semn care „indică" la un semn care „desemnează".

Care va fi atunci semnul propriu-zis al funcției de mai sus? Litera „x" nu reprezintă o componentă esențială a expresiei, întrucît în locul lui „x" se putea introduce orice alt semn care indică în mod indefinit, de exemplu y, z etc. Punîndu-se în locul lui „x" numele unui *anumit argument* — adică al unui număr — se obține o expresie care *desemnează* un alt număr. Expresia căpătată prin înlocuirea lui „x" cu numele unui argument determinat desemnează o *valoare* a funcției şi anume valoarea pe care funcția o ia pentru respectivul argument. Însăşi funcția este aşadar, corelația, *legea generală* care pune în corespondență fiecărui argument o anumită valoare.

Expresia funcției considerate va fi, în fapt:

„$(\,)^2 + 3(\,)$"

locurile goale indicînd unde anume va figura semnul unui argument; expresia astfel obținută semnifică valoarea funcției pentru acel argument.

Semnul unei funcții — spune Frege — este nesaturat. Această „nesaturare", „incompletitudine" a semnului funcțiilor se extinde

[32] Se va observa că nu s-a precizat ce înseamnă un *nume*, ce înseamnă *a semnifica*, a indica în mod *indefinit*. Aceste noțiuni semantice sînt aici presupuse.

la funcţiile înseşi care de asemenea pot fi metaforic numite „nesaturate".

Valoarea funcţiei pentru un argument va fi deci rezultatul completării funcţiei cu argumentul respectiv. Argumentul însuşi nu este totuşi o parte componentă a funcţiei, după cum semnul argumentului nu este o parte a semnului funcţiei. Cînd două funcţii iau aceeaşi valoare pentru acelaşi argument, oricare ar fi acesta din urmă, se spune că ele au acelaşi „parcurs valoric" (Werthverlauf). Frege adoptă *ca principiu fundamental al logicii*[33] echivalenţa între faptul că două funcţii iau, în mod general, aceeaşi valoare pentru acelaşi argument şi identitatea „parcursurilor valorice" ale celor două funcţii.

„Parcursul valoric" al unei funcţii este însă un obiect, şi nu o funcţie. O condiţie este echivalentă cu cealaltă[34]. Tranziţia se poate face în ambele sensuri.

Noţiunea de funcţie astfel obţinută este apoi generalizată.

În decursul dezvoltării matematicii, această generalizare — după cum arată Frege[35] — a survenit în două direcţii: prin extinderea operaţiilor matematice care servesc la construirea funcţiilor şi prin admiterea numerelor complexe ca argumente şi valori ale funcţiilor.

Evident, putem vorbi şi despre funcţii de două sau mai multe argumente.

Frege a generalizat însă într-un mod şi mai radical noţiunea de funcţie. Generalizarea survine prin admiterea ca argumente şi valori ale funcţiei nu numai a numerelor, ci a oricăror obiecte, fără restricţie. Asemenea obiecte pot fi, pe lîngă numere, valorile de adevăr (Adevărul şi Falsul), persoanele, lucrurile, parcursurile valorice ale funcţiilor etc.

După Frege, *Desemnatul (Semnificaţia) unei expresii care poate fi subiectul unei propoziţii singulare este un obiect.* Considerînd că definirea propriu-zisă a ceea ce el numeşte obiect este imposi-

[33] Principiul este al *logicii*, într-adevăr, deoarece noţiunea de funcţie este generalizată astfel încît să devină a logicii. În particular, principiul este aplicabil la concepte.

[34] Am amintit mai sus că acest principiu — adoptat ca lege fundamentală V în *Grundgesetze der Arithmetik* — duce la o contradicţie ruinătoare.

[35] „Funcţie şi concept", p. 253.

bilă, Frege dă numai o indicație cu privire la ceea ce înțelege el prin „obiect". Pe scurt: „Un obiect este tot ce nu este funcție, astfel că expresia sa nu conține nici un loc liber"[36].

Frege generalizează noțiunea de funcție astfel încît orice *funcție* poate avea ca argument *orice obiect*. Există un singur domeniu al *tuturor* obiectelor, un unic „univers de discurs"[37] și orice funcție care admite ca argumente obiecte[38] trebuie să fie „peste tot definită" (cum am spune astăzi), adică trebuie să ia o valoare pentru orice obiecte luate ca argumente ale funcției. De exemplu, operația adunării este astfel generalizată încît expresia „a + b" ia întotdeauna o valoare, oricare ar fi numele proprii puse în locul lui „a" și „b". După cum scrie Frege — alegerea regulei de atribuire de valori funcției pentru orice argumente posibile este o chestiune secundară; important este doar să se dispună de o atare regulă[39].

Printre funcțiile care iau ca argumente obiecte există funcții de un fel deosebit: cele care iau ca valoare pentru orice argument obiectele numite valori de adevăr: Adevăratul sau Falsul.

Se ajunge astfel la înțelegerea conceptului ca o funcție logică, ale cărei argumente sînt obiectele despre care fie în mod adevărat, fie în mod fals, se poate enunța conceptul.

Mai întîi, Frege observă că ecuațiile, inegalitățile și alte expresii ale Analizei matematice se pot scinda în două părți: una „completă" (adică desemnînd un obiect) și alta incompletă, adică desemnînd o entitate „incompletă", „nesaturată", deci o funcție.

Scindarea se poate efectua însă în mai multe feluri. De exemplu, expresia

$$„2 > 1"$$

se poate scinda în părțile: „2" și „> 1", sau în părțile: „2>" și „1", sau în: „2" și „1", pe de o parte, și „>", pe de altă parte.

---

[36] *Op. cit.*, p. 18; în vol. de față, p. 258.

[37] Cum susține în mod explicit FREGE, în „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*", în „Archiv für systematische Philosophie", vol. I (1895), pp. 433—456.

[38] Precizarea ca funcțiile în cauză iau ca argumente obiecte este necesară, deoarece există alte funcții care iau ca argumente funcții.

[39] „Funcție și concept", p. 260.

Forma *generală* a expresiei, din care expresia rezultă prin particularizare, va fi, corespunzător fiecărui mod de analiză: „x>1", respectiv „2>*y*", respectiv „x>y".

La fel stau lucrurile cu orice enunț.

Conceptul se relevă astfel a fi o funcție a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr.

Cunoașterea înțelesului abstract dat de Frege noțiunii de funcție permite familiarizarea rapidă cu acest nou mod de analiză logică și de formalizare, pe cît de simplu pe atît de profund.

Conceptul este desemnat de un predicat al unei propoziții (singulare afirmative). Acest predicat este „nesaturat". Expresia unui concept — cum spune Frege — conține un loc gol, și numai cînd acest loc este completat cu un nume propriu, sau cu altă expresie care ține locul unui nume propriu, apare un sens complet". De exemplu, predicatul propoziției „Caesar a cucerit Gallia" ar fi „...a cucerit Gallia", locul gol arătînd „nesaturarea" funcției, respectiv faptul că ceea ce se enunță presupune, necesită un subiect posibil.

Pentru fiecare argument al funcției, adică pentru fiecare obiect despre care se enunță un concept, se poate indica în mod univoc un obiect, și anume o valoare de adevăr.

Afirmația că valorile funcției numite concept sînt valori de adevăr poate fi justificată, spunînd că ceea ce se enunță despre un obiect (despre un „subiect" în sens aristotelic) se enunță în mod adevărat sau fals. Vorbind despre o funcție, vorbim despre o *operație* matematică; a obține valoarea unei funcții pentru un argument înseamnă a efectua corect o serie de operații matematice. În mod analog, vorbind în logică despre funcții avem în vedere operații logice; vorbind despre valorile funcției avem în vedere ***rezultatul*** operațiilor logice. Ca funcție logică, conceptul fregean presupune anumite operații; aplicarea lui la un argument înseamnă (iarăși vorbind în limbajul logicii prematematice) „a enunța ceva despre ceva".

Frege nu folosește acest limbaj al operațiilor logice, dar vorbește în mod explicit despre „natura predicativă a conceptului". El justifică altfel — pe o cale semantică, referindu-se la raportul

dintre semne, expresii, precum şi entităţile care constituie sensul şi în special semnificaţia expresiilor — alegerea valorilor de adevăr ca valori ale conceptelor pentru obiectele la care se aplică. Ontologia implicită a lui Frege este astfel intim legată de semantica sa explicită.

Am văzut că Frege consideră funcţia ca fiind desemnată de o expresie „nesaturată", „incompletă"; totodată, el admite tacit, în mod general, prin analogie cu ceea ce se petrece în limbajul matematic, că rezultatul completării expresiei „nesaturate" desemnînd o funcţie cu numele propriu al unui argument *desemnează* valoarea funcţiei pentru respectivul argument şi ca atare este *numele* acelei valori.

Urmează că dacă privim conceptele ca funcţii, ca entităţi „nesaturate", desemnate de expresiile predicative, „nesaturate" şi ele, rezultatul completării expresiei funcţiei cu numele unui obiect, adică îmbinarea unui predicat cu un subiect, desemnează valoarea funcţiei pentru acel obiect. Dar aceasta înseamnă că propoziţia singulară care rezultă este şi ea numele unui obiect. Şi deci este „nume propriu" (în accepţia semanticii fregeene). Într-adevăr, potrivit lui Frege, orice propoziţie are pe lîngă sens („Sinn") şi o semnificaţie („Bedeutung"), adică desemnează ceva. Iar ceea ce desemnează este o valoare de adevăr, prin urmare un obiect. Ca atare, propoziţia este un nume propriu, al Adevăratului sau al Falsului.

Ar fi interesant de urmărit în amănunt această legătură între ontologia implicită şi semantica explicită a lui Frege, unitatea lor organică fiind de netăgăduit. Oare, genetic vorbind, ontologia lui Frege va fi determinat trăsăturile fundamentale ale semanticii sale, printre care identificarea propoziţiilor cu nume proprii avînd ca semnificaţie una sau alta dintre valorile de adevăr? Fapt este că ele se desfăşoară concomitent, înăuntrul aceleiaşi concepţii teoretice, iar Frege justifică definiţia conceptului, pe de o parte, şi concepţia sa despre propoziţii, pe de altă parte, prin raţiuni aparent independente.

Conceptele sînt funcţii de la domeniul obiectelor la domeniul valorilor de adevăr.

În sens *larg*, conceptele sînt funcţii care iau ca valori numai

valori de adevăr, numărul argumentelor putînd fi mai mare decît 1. Frege numește *relații* asemenea funcții de mai multe argumente; interes prezintă mai ales funcțiile de două argumente.

În sfîrșit, noțiunea de *funcție* admite altă generalizare, întrucît argumentul unei funcții poate fi și el o funcție, nu un obiect. Frege distinge între funcții de treapta unu care au ca argumente obiecte și funcții de treapta a doua care au ca argumente funcții de treapta unu.

Astfel înțeleasă, noțiunea matematică de funcție a devenit o idee pur logică. Funcțiile pe care le numim logice în sens mai restrîns sînt funcțiile asociate conectivelor logicii propozițiilor și cuantorilor din logica predicatelor, deci — în terminologia scolastică — asociate așa-numitelor „expresii sincategorematice".

Printre aceste funcții se numără și cea notată prin ———x; valoarea ei coincide cu argumentul, atunci cînd acesta este o valoare de adevăr, și este Falsul, în cazul cînd argumentul este un orice alt obiect.

Negația se definește ca funcție care ia valoarea Adevăratul pentru orice argument pentru care funcția ———x are valoarea Fals, și are valoarea Falsul pentru orice argument pentru care funcția ———x ia valoarea Adevăratul.

Negația, afirmația, implicația și orice altă funcție avînd obiecte ca argumente sînt definite de Frege pentru *orice obiect*. Acest mod de a defini funcțiile logice este specific lui Frege; logica de astăzi a renunțat — a trebuit să renunțe, din cauza amenințării paradoxelor — la această ambițioasă generalizare logicistă.

Cuantorul existențial și cel universal sînt la rîndul lor funcții de treapta a doua.

Unul din rezultatele bizare ale concepției lui Frege după care funcțiile sînt peste tot definite și există un unic domeniu al obiectelor este că orice concept se poate enunța în mod adevărat sau fals despre orice obiect, indiferent de natura lui. Această consecință, pe care o putem deduce din ontologia și semantica lui Frege, are o alură paradoxală; mai adecvată la intuițiile noastre curente pare o modificare a teoriei fregeene în direcția unei „teorii a tipurilor" pe care, deși Frege a respins-o cu anticipație în polemica sa împotriva lui Schröder, el însuși a pre-

gătit-o, involuntar, prin distincția sa intre funcțiile de prima și a doua treaptă[40].



Teoria lui Frege asupra funcțiilor în general și a conceptului în special suscită unele dificultăți. Am văzut mai sus că orice funcție are caracteristica „incompletitudinii", „nesaturării". Conceptul are și el, funcție fiind, atributul funcției: este nesaturat, incomplet (pentru a folosi terminologia metaforică a lui Frege). Simbolul conceptului din limbajul formal, ca și termenul conceptual din limbajul obișnuit la rîndul lor sînt nesaturate, incomplete.

Sensul „nesaturării" conceptului rezultă din afirmația lui Frege: „... Nu toate părțile unui gînd pot fi închise în sine; cel puțin una trebuie să fie nesaturată sau predicativă, altfel ele nu s-ar îmbina"[41]. Nesaturarea conceptului rezidă în chiar predicativitatea sa. Revenim pe un teren cunoscut, problema fiind aceea a predicativității conceptului. Nu se poate ignora faptul, trecut uneori cu vederea de comentatorii lui Frege[42], că, departe de a se abate de la problematica filosofică majoră a logicii, gîndirea lui Frege pune în mod foarte apropiat problemele care au fost

---

[40] Schröder a anticipat, în ale sale *Prelegeri de algebra logicii*, teoria tipurilor a lui Russell (vezi BOCHENSKI, *Formale Logik*, secțiunea 48 C; A. CHURCH, „Schröder's anticipation of the simple theory of types", în „Erkenntnis", 9, 1939, pp. 149—152; A. N. BIRIUKOV, *Prăbușirea concepției metafizice despre caracterul universal al domeniului obiectelor în logică*, Moscova, 1963). Limitarea „universului de discurs" trebuie desigur concepută în două sensuri: 1. împărțirea „obiectelor" în tipuri sau trepte diferite, ierarhizarea lor; 2. admiterea unei pluralități a „universurilor de discurs", în funcție de materia tratată, adică de conținutul propozițiilor unei limbi, și deci admiterea unei pluralități de limbaje. Teoria tipurilor are în vedere primul sens. În cele de mai sus, am avut în vedere ambele sensuri.

[41] FREGE, „Despre concept și obiect", în vol. de față, pp. 304—305.

[42] Vezi, de exemplu, MAX BLACK, „Frege on Functions" (în *Problems of Analysis*, Philosophical Essays, Routledge & Kegan Paul, London, 1954), unde este comentat citatul de mai sus.

dezbătute în istoria logicii, înscriindu-se astfel în tradiția filosofică[43].

Un nume propriu *desemnează* un obiect; un termen conceptual *se enunță despre* un obiect. Nesaturarea, incompletitudinea conceptului exprimă tocmai acest „se enunță despre..." Suportul enunțării — subiectul logic — este *presupus*, însă nu este totodată *spus* de către termenul conceptual. Ceea ce nu spune, dar presupune conceptul este *complinirea* sa, indicarea subiectului despre care se enunță.

Metoda nesaturării este revelatoare pentru una din fațetele filosofiei lui Frege; gînditorul german nu acordă subzistență autonomă conceptului și în același timp nu-i refuză obiectivitatea.

Deosebirea între obiect și concept este însă la fel de relativă ca și deosebirea dintre argument și funcție. Conceptul este la rîndul lui un obiect „sui-generis" și numai ca atare are proprietăți. Cînd admitem că o funcție are proprietăți, spunem implicit că funcția este și ea un obiect „sui-generis". Mai trebuie observat de asemenea, ca explicație alternativă, că trecerea la o expresie care desemnează conceptul în calitate de obiect este totodată trecerea de la un nivel lingvistic la altul, sau trecerea de la limbaj la metalimbaj.

---

[43] Un exemplu este tot studiul de mai sus al lui Black. Iată ce spune el în privința problemei predicativității conceptului, problemă pe care nici nu o recunoaște ca atare. „Nume, predicate și alte expresii sînt abstracții din propoziții (sentences); chestiunea «Cum se îmbină ele?» («How do they hold together?») nu are mai mult sens ca aceea: «Cum se îmbină cărămizile și mortarul unui zid?»" (BLACK, *op. cit.*, p. 245). — Ce putem spune despre această afirmație? Am fi dezarmați dacă însăși metafora mortarului și cărămizilor nu ne-ar sugera răspunsul: problema „cum se îmbină părțile unei propoziții" are tot atît a sens ca și problema îmbinării materialelor de construcție. Unui zidar, mînuirea empirică a mistriei nu-i ridică vreo comandă teoretică: este doar evident, și practic verificabil că mortarul și cărămizile țin împreună. Lucrul acesta este evident, și zidarul nostru este astfel un spirit pozitiv. Unui inginer, unui specialist în materiale, în sfîrșit unui fizician, problema i se pare însă gravă și serioasă. Și pe drept cuvînt. La fel, problema îmbinării materialelor de construcție ale propoziției depășește nivelul pozitivității constructorului; este o problemă filosofică. Trebuie văzut ca un merit al lui Frege punerea unor probleme „evidente".

Frege a șovăit în fața acestei concluzii, și de aceea nu a putut surmonta dificultățile teoriei sale logice.

Frege distinge între funcții de treapta unu, doi, trei, ... și argumente de tipul 1 (obiecte), de tipul doi (funcții de treapta unu sau de un singur argument), de tipul trei (funcții de treapta a doua de două argumente) ș.a.m.d.[44].

Însă — am mai spus — el nu completează ierarhizarea argumentelor pe tipuri și a funcțiilor pe trepte cu împărțirea obiectelor pe trepte. Dacă introducem o asemenea împărțire, putem admite că o funcție de treapta unu este totodată un obiect de treapta doi, însă expresia pentru o funcție de treapta unu *qua* funcție va fi diferită de expresia pentru aceeași entitate luată ca obiect. Această diferență, și chiar incompatibilitate, a modurilor de notație se explică prin faptul că funcția este funcție numai față de argumentele sale, însă față de proprietățile sale este obiect. Ne trebuie deci o expresie pentru funcția ca funcție și o altă expresie pentru funcția ca argument. Funcția este nesaturată față de argumentele sale, însă nu față de proprietățile sale.

Soluția nu se rezumă deci la ierarhizarea expresiilor și a entităților desemnate de expresii, ci presupune și o explicație corespunzătoare din punct de vedere filosofic.

Un element „metafizic" în sistemul lui Frege rezidă — după părerea noastră — în absolutizarea noțiunii de obiect. Frege a recunoscut pe jumătate dificultatea — spunînd că este vorba de o „stîngăcie" a limbii obișnuite — și a remediat-o numai pe jumătate, admițînd că o funcție poate fi argumentul altei funcții. Însă inadvertența limbii obișnuite transpare și în limbajul formal, unde avem două notații: una desemnînd funcția *ca* argument și alta desemnînd funcția ca funcție *pentru* argument; soluția radicală — după părerea noastră — o constituie teoria tipurilor, interpretată filosofic în mod corespunzător. Această interpretare ne explică de ce avem două notații — una pentru funcție ca argument al altei funcții și alta pentru funcție ca aplicată efectiv la argumentele sale.

Dar, pe de altă parte, se poate trage o concluzie deloc surprinzătoare, și asupra determinațiilor logico-filosofice: *relativitatea*

---

[44] FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, Erster Band, p. 40.

distincţiei între proprietate, obiect şi relaţie. Proprietatea este un obiect (abstract, ideal); obiectul este substratul proprietăţilor sale şi este obiect faţă de proprietăţile sale; relaţia, de asemenea, are proprietăţi şi este obiect în raport cu proprietăţile care îi revin. însă este relaţie faţă de obiectele între care există relaţia, fiind totodată o proprietate a fiecărei perechi ordonate de argumente între care fiinţează etc. Pe de altă parte, obiectele la nivelul de bază apar numai ca obiecte, adică *nu sînt* proprietăţi, ci *au* proprietăţi, nu sînt relaţii, ci intră în relaţii.

Sub raport logico-lingvistic, relativitatea nu se manifestă în mod nemijlocit, ci numai prin separarea determinărilor opuse şi repartizarea lor asupra unor expresii diferite. Limba are proprietatea de a transforma în „lucruri" deosebite deosebirile coexistente; limba substanţializează funcţiile diferite ale unei aceleiaşi entităţi. Aşa se face că deşi un concept este *în sine* obiect (=cade sub alte concepte), expresia pentru conceptul *qua* concept este diferită de expresia pentru conceptul *qua* obiect. Aceeaşi *expresie* nu poate desemna şi o funcţie şi un argument deşi este posibil ca ceea ce este desemnat să devină argument — într-un raport — sau funcţie într-un alt raport. Sursa dificultăţilor rezidă aşadar în transpunerea situaţiei de pe planul expresiei pe planul semnificaţiei.



Nu va fi de prisos să amintim că unele distincţii făcute de Frege pot fi regăsite în altă ipostază la Aristotel[45]. Fireşte, distincţia nu o găsim pusă în aceeaşi termeni; pe de altă parte, diferenţa dintre concepţiile lui Frege şi Aristotel este departe

---

[45] A se vedea articolul nostru „Însemnări despre ontologia lui Frege" (în „Revista de filozofie", nr. 1, 1968, pp. 55—67, îndeosebi pp. 66—67), unde relevam posibilitatea unui paralelism între ontologia lui Frege şi cea a *Categoriilor* lui Aristotel. În „Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy" (D. Reidel, 1967), Ignacio Angelelli dezvoltă amplu un punct de vedere analog, raportînd ontologia lui Frege la ontologiile lui Aristotel şi ale altor filosofi. Succintele consideraţii din paginile de mai jos se întîlnesc cu exegeza mult mai bogată întreprinsă de către Angelelli.

de a fi numai terminologică. În fapt, avem de-a face cu teorii radical diferite. Frege nu este un aristotelic, dar în anumite privințe concepțiile lui pot fi privite ca o dezvoltare a celor aristotelice. Pe de altă parte, „microscopul logic" despre care vorbea Frege în *Begriffsschrift* ne permite a desluşi sensul unor idei dificile şi a reactualiza teme aristotelice.

Dacă deschidem *Categoriile*, sîntem întîmpinați încă de la prima frază de distincția între nume şi logos. „Se cheamă omonime lucrurile care, deşi au acelaşi nume, diferă în noțiunea corespunzătoare numelui"[46]. Deci: expresii (onoma), lucrurile ce primesc nume şi în sfîrşit „noțiunea corespunzătoare numelui", „logosul numelui". Sînt trei planuri distincte; în aceste planuri se înscrie şi teoria logică a lui Aristotel şi teoria logică a lui Frege (În ceea ce priveşte „stările sufleteşti", potrivit lui Aristotel, ca şi lui Frege, „ele aparțin unei cercetări deosebite de aceea care ne preocupă acum")[47].

În al doilea capitol al *Categoriilor* ajungem la distincția care ne interesează. Cele *ce sînt rostite* dar totodată şi *cele ce sînt* — sînt împărțite în patru clase:

a) unele sînt enunțate despre un anumit subiect dar nu sînt în nici un subiect;

b) altele sînt în subiect, dar nu se enunță despre subiect;

c) altele se enunță despre un subiect şi sînt într-un subiect;

d) altele însă nu sînt într-un subiect şi nici nu sînt enunțate despre un subiect[48].

Cele din prima clasă corespund într-un fel *conceptelor* lui Frege, şi anume conceptelor de treapta unu, avînd un singur argument. În general, conceptele de treapta unu au proprietatea de a se enunța despre un anumit subiect şi totodată „nu sînt în nici un subiect", în accepția conferită de Stagirit acestei expresii. Într-adevăr, Aristotel spune că „prin a fi într-un subiect, nu înțeleg a fi cum sînt părțile într-un întreg, ci a nu putea să existe în afară de subiectul în care este"[49].

---

[46] *Categoriile*, 1, *1* a (trad. română, Editura Ştiințifică).
[47] *Despre interpretare*, I, 16 a.
[48] *Categoriile*, 2, 1 a—b.
[49] *Categoriile*, 2, 1 a.

Cele din ultima clasă — cele ce nu sînt într-un subiect și nici nu sînt enunțate despre un subiect — sînt lucrurile individuale, sensibile. Nu numai un ce anumit, individual, dar totodată un ce sensibil, o „substanță primă" (termenul îl vom întîlni abia în capitolul următor al *Categoriilor*). Toate entitățile din ultima clasă sînt subiecte, însă nu orice subiect aparține acestei clase.

Cele din a doua clasă nu se enunță despre un subiect, dar sînt într-un subiect. Să observăm însă că despre ele se poate enunța ceva. Ele sînt subiecte individuale. În adevăr, subiect individual este tot ce suportă o enunțare și nu se poate la rîndul său enunța.

Prin urmare, clasele b) și d) cuprind obiectele individuale, dar nu numai pe cele sensibile, ci orice „are un caracter de unitate", orice este individual și nu se enunță despre un subiect. Dar în acest caz, noțiunea de *subiect individual* corespunde noțiunii de *obiect* la Frege (Frege admițînd un unic domeniu al obiectelor, pe care sînt definite toate funcțiile de treapta unu; printre aceste obiecte se numără și obiectele ideale, care nu cad sub simțuri: valorile de adevăr, numerele, „parcursurile valorice", sau, de pildă, „o anumită cunoștință gramaticală", ca să reluăm exemplul propus de către Aristotel).

Concepția lui Frege permite o *generalizare*, distincția dintre concept și obiect fiind un caz particular al distincției fundamentale dintre funcții și entitățile care nu sînt funcții dar există corelativ la funcții, adică posibile argumente. Întreaga problemă *logico-filosofică* este reluată pe un plan mai general. Printre altele, interesează nu numai cum este posibil a enunța ceva despre ceva (problema tradițională a predicației), ci și cum este posibil a enunța o relație. Cum sînt posibile, care este esența funcțiilor în general?

Disputa tradițională a universalelor se duce, în fond, în jurul problemei existenței proprietăților și relațiilor, precum și a „obiectelor ideale"; disputa contemporană este mai generală, ea angajînd și răspunsul la problema *operațiilor*. Într-adevăr, vorbind despre funcții vorbim implicit și despre operații; mai întîi în sens larg, deoarece în sens larg funcția este o operație; apoi într-un sens mai restrîns, căci alături de funcții care iau ca valori numai valorile de adevăr — concepte și relații — există funcții

care iau şi alte obiecte ca valori; pe acestea din urmă le numim *operaţii* (de ex.: adunarea, scăderea, funcţia *sin* x, funcţia *tatăl lui x* etc.), deosebindu-le de atribute (relaţii şi proprietăţi).



Combătînd „logica psihologică", Frege a reliefat obiectivitatea gîndului şi faptul că logica are ca obiect adevărul.

Logica lui Frege nu este o logică a corectitudinii decît în mod secund; în mod primordial, ea este o logică a adevărului. Mai exact, o logică a legilor adevărului.

Frege nu se limitează la a sublinia latura obiectivă a logicii; el sugerează şi explică pe această bază legătura legilor logicii cu activitatea de cunoaştere.

În sens restrîns, logica este un ansamblu de legi şi de definiţii ale termenilor *sincategorematici*, legile ei se formulează prin intermediul unor variabile (semne care indică în mod indefinit entităţi de un fel sau altul) şi al unor expresii sincategorematice (expresii logice care nu au semnificaţie izolat, dar aduc o contribuţie indispensabilă la construcţia şi semnificaţia termenilor şi propoziţiilor). Termenii sincategorematici folosiţi de Frege sînt: implicaţia, negaţia şi cuantorul universal (denumirile moderne de aici nu coincid cu cele utilizate de Frege); alţi termeni sincategorematici se definesc pe baza acestora. Frege nu vorbeşte despre sincategoreme, ci despre linia negaţiei, semnul identităţii, linia condiţionalului etc. Toate aceste semne desemnează însă concepte sau alte funcţii. Astfel, logica lui Frege este o teorie a funcţiilor. Cele mai multe dintre aceste semne — în fapt, toate semnele primitive — semnifică *concepte*. În acest sens, logica lui Frege este o teorie a conceptelor. Însă Frege dezvoltă cu insistenţă ideea că punctul de pornire al logicii este adevărul, iar prin acesta este gîndul, posibilul conţinut de judecată, exprimabil în propoziţie. La concept şi obiect ca abstracţii separate ajungem prin analiza logică a propoziţiilor, prin desprinderea expresiilor componente şi corelarea lor cu entităţi extralingvistice şi extramentale. În *acest* sens, logica lui Frege este primordial a adevărului şi gîndului, este o logică propoziţională sau, şi mai bine, judicaţională.

Prin gînd, Frege nu înțelege ceea ce este gîndit de cineva. Legile logicii, potrivit lui Frege, se referă la gînduri, la conținuturi inteligibile, la conținuturi care pot deveni materialul gîndirii și, odată asertate, sînt judecăți. Este o diferență între *a fi* pentru gîndire și *a putea fi* pentru gîndire. *Gîndul*, la Frege, poate fi al gîndirii, poate fi înțeles, cuprins, exprimat etc., însă el are o existență antediluviană. Contestînd faptul că legile logicii sînt legi ale gîndirii, Frege admite implicit că gîndirea este o activitate mundană, un proces temporal, psihic și neagă implicit că există o gîndire antediluviană.

Legile logicii sînt atemporale. Ele se referă la obiecte și la gînduri. (Prin gînd nu se înțelege gîndul cuiva, ci ceea ce este adevărat sau fals).

Un pasaj din *Grundgesetze der Arithmetik* ilustrează această concepție: „Cum se formulează, de fapt, principiul identității? Oare astfel: «Oamenilor le este imposibil în anul 1893 să recunoască un obiect ca diferit de sine însuși»? Sau: «Orice obiect este identic cu sine însuși»? Prima lege tratează despre oameni și conține o determinare temporală, în cealaltă nu este vorba nici despre oameni, nici despre timp. Ultima este o lege a ființării adevărate (ein Gesetz des Wahrseins), prima este o lege privitor la ceea ce oamenii consideră adevărat (Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens). Conținutul ei este cu totul diferit și legile sînt independente una față de alta, astfel că nici una dintre ele nu poate fi inferată din cealaltă“[50].

Consecința concepției lui Frege este transformarea logicii într-o teorie a unor entități obiective, existente independent de conștiință, de gîndire, într-o teorie a obiectelor și funcțiilor, teorie formală și de valabilitate generală.

Frege nu a vorbit vreodată despre vreo „ontologie formală“ dar, implicit, fiind o logică a obiectului, conceptului și relației, logica sa este o asemenea ontologie, o teorie a existenței obiective.

În legătură cu această *ontologie formală* se pot scoate în relief cîteva caracteristici esențiale:

1. Sistemul lui Frege nu se confundă cu *concepția filosofică* a lui Frege și, într-un anumit sens, este independentă de ea. De

[50] *Grundgesetze der Arithmetik*, I, p. XVII.

exemplu, Frege are o anumită concepţie asupra obiectelor şi conceptelor; ea are un caracter metalogic, nefiind formalizată în cadrul sistemului. Nu există, de pildă, o formulă a sistemului care, interpretată, să vorbească despre caracterul „nesaturat", „incomplet" al funcţiei, deşi, pe de altă parte, *orice formulă arată* acest caracter al funcţiei.

2. Sistemul lui Frege este un sistem *semantic*, adică însoţit de o interpretare. Semnificaţia şi sensul formulelor sînt stabilite pe baza unor principii şi reguli sintactice, semantice şi pragmatice.

Dacă legile logicii nu sînt legi ale gîndirii, există totuşi o legătură între aceste legi şi activitatea de cunoaştere, de gîndire, a omului?

Frege vorbeşte în termeni privind entităţi obiective, dar aceasta nu înseamnă că logica sa nu are semnificaţie noetică. Aristotel — se poate aminti acest lucru — a evitat, în logica sa, să vorbească despre „stările sufleteşti", despre ideile *subiective* ale omului. Limbajul silogisticii sale este, în mod precumpănitor, un limbaj al entităţilor obiective; termenii generali pe care îi indică în mod nedefinit variabilele logicii sale sînt, — potrivit Stagiritului — „cele ce se enunţă despre subiect dar nu sînt în nici un subiect" (şi deci nici în suflet). Silogismele sale nu sînt prescripţii (reguli care asigură corectitudinea unui act de gîndire), ci legi ale adevărului *fiinţei*. Nu mai puţin însă, silogistica lui Aristotel are şi o semnificaţie noetică. Acelaşi este cazul şi cu Frege.

Pe de altă parte, ontologia lui Frege este *incompletă* şi *schematică*, construită astfel încît să corespundă cerinţelor logicii, înţeleasă în sens noetic. *Incompletă*, pentru că nu este o teorie generală a existenţei, un sistem atotcuprinzător; este o teorie a obiectelor, proprietăţilor şi relaţiilor, dar nu o teorie a raportului dintre conştiinţă şi existenţă, a cauzalităţii, a spaţiului şi timpului, a mişcării, a formei şi conţinutului, fenomenului şi esenţei etc. În acest sens, ontologia lui Frege este un *fragment*, însă un fragment relativ autonom. *Schematică*, pentru că nu îşi propune să epuizeze caracteristicile generale ale categoriilor filosofice: obiect-proprietate-relaţie. Conceptul reţine unele trăsături generale ale *proprietăţilor* şi *relaţiilor*, face însă abstracţie de alte trăsături generale. O asemenea *abstragere* constituie fie o *presupo-*

ziție, fie, mai curînd, o limitare a logicii fregeene. De exemplu, se face abstracție de caracterul *variabil* al unor proprietăți, de variația lor intensivă și extensivă, de „mai multul" și „mai puținul" lor, de deosebirea între proprietate continuă și proprietate discretă etc. Toate proprietățile și relațiile dintre obiectele nelingvistice sînt privite după chipul și asemănarea proprietăților și relațiilor pe care le au expresiile lingvistice. Numai astfel conceptul ajunge să se identifice cu atributul unei clase de obiecte. La fel, admiterea conceptelor (proprietăților) vide, adică a proprietăților și relațiilor sub care nu cade nici un obiect sau nici un cuplu de obiecte contrazice ontologia „materială". În mod obișnuit, proprietatea revine cel puțin unui obiect; o proprietate care nu revine nici unui obiect — sau cel puțin o proprietate care *nu poate* reveni (întrucît contrazice legile logicii sau ale științelor naturii) nici unui obiect, este considerată de obicei — de „bunul-simț", dar și de filosofia bunului-simț, drept o ficțiune. Logica formală admite însă fără reticențe o asemenea proprietate (concept).

Exemplele s-ar putea înmulți.

Dacă deci logica lui Frege, înțeleasă ca ontologie, este incompletă și schematică, aceste caractere vin să răspundă tocmai funcțiunii sale noetice.

Pînă acum a fost vorba despre logică *în sens restrîns;* în acest sens, logica lui Frege nu are o semnificație noetică nemijlocită. Tot astfel, sistemul formal al silogisticii aristotelice, calculul claselor al lui Boole și orice alt sistem logic pot fi privite în perspectivă ontologică, ca teorii ale unor entități obiective. Motivul l-am amintit: legile logicii sînt *universal valabile, atemporale*, independente de gîndirea umană, independente de existența concretă și de funcționarea gîndirii. Ele sînt comparabile cu legile aritmeticii, care au o valabilitate universală, nefiind însă nici legi ale naturii, nici legi sociale, nici legi ale gîndirii.

Gîndirea poate încălca legile logicii sau legile aritmeticii, dar nu poate „încălca" legile psihicului — normal sau patologic —, ceea ce sugerează că legile logicii sau aritmeticii nu stau în același raport de inerență față de gîndire ca legile psihologiei, sau în raportul în care legile logicii și aritmeticii stau față de obiecte, concepte, valori de adevăr sau numere.

Gîndirea, cum se știe, nu poate încălca vreo lege logică, ci numai o cerință, o normă ce derivă din respectiva lege. Cu alte cuvinte, o regulă, care nu trebuie confundată cu o lege logică, dar se justifică în temeiul legilor logicii.

Frege constată că legile logicii nu sînt o descripție naturalistă a gîndirii, nu sînt legi ale gîndirii; totodată, el pune în evidență caracterul *prescriptiv* al *regulilor* ce derivă din legile logicii.

Dacă logica este înțeleasă în *sens lărgit*, ca un ansamblu de reguli a căror aplicare vizează obținerea anumitor rezultate — corectitudinea fiind o condiție a adevărului —, atunci nu se poate contesta legătura logicii cu gîndirea reală a omului. Nici Frege nu contestă, în acest sens larg, legătura logicii cu gîndirea. El urmărește să arate că legile logicii nu se referă la gîndirile oamenilor, ci la conținutul obiectiv al acestor gîndiri, conținut obiectiv, ideal, a cărui realitate nu depinde de conștiința umană. Acest conținut este numit *gînd* (Gedanke).

Legile logice, pentru Frege, nu sînt legi ale *activității* gîndirii, ci ale *conținutului* ei, în măsura în care reprezentările nu intră în joc, ci intră *gîndurile*.

Despre actul judecății, judecarea, Frege scria că, în conformitate cu concepția prezentată, „5>4" și „1+3=5" ne dau numai expresii ale valorilor de adevăr, fără ca astfel să se facă vreo aserțiune. Această separare a judecării (Urteilen) de cele asupra cărora se judecă apare indispensabilă, întrucît altfel nu s-ar putea exprima o simplă supoziție, punerea unui caz, fără a judeca de asemenea asupra felului cum apare. Este nevoie, prin urmare, de un semn special, pentru a putea aserta ceva[51].

Pasajul citat este concludent pentru modul în care Frege înțelege conexiunea dintre propoziții („expresii ale valorilor de adevăr"), gînd (= sens al unei propoziții, conținut obiectiv corelat Adevăratului sau Falsului) și judecare (= act de gîndire constînd în recunoașterea adevărului unui gînd, în asertarea lui).

În sensul larg, logica include și metalogica; alături de sintaxă și semantică intră în joc pragmatica logică, o teorie a relațiilor dintre limbaj, conținuturi și subiectul care folosește limbajul și

[51] „Funcție și obiect" (în volumul de față, p. 261).

efectuează diferite operaţii logice: *înţelege* gîndurile, ***judecă***, adică recunoaşte adevărul lor, le *exprimă* ş.a.m.d. Vorbind despre obiectul şi conţinutul logicii, Frege avea în vedere logica în sens restrîns. Frege este creatorul semanticii logice şi, în acelaşi timp, în concepţia sa filosofică semantica se îmbină în mod spontan cu elemente de ***pragmatică logică***. Spre sfîrşitul vieţii sale, în special în articolul „Der Gedanke" („Gîndul"), Frege dezvoltă următoarea distincţie, formulată dealtfel şi în lucrări anterioare:

Într-o propoziţie declarativă „... trebuie să fie deosebite două elemente: conţinutul, care este comun şi respectivei propoziţii interogative (Satzfrage), precum şi asertarea (Behauptung). Primul este gîndul, sau cel puţin cuprinde gîndul. Astfel, este posibil să exprimăm gîndul fără a-l pune ca adevărat. Ambele sînt atît de strîns legate într-o propoziţie declarativă, încît este lesne să trecem cu vederea separabilitatea lor. În consecinţă, putem distinge:

(1) înţelegerea unui gînd — conceperea;
(2) recunoaşterea adevărului unui gînd — judecata;
[Într-o notă, Frege adaugă: „Mi se pare că gîndul şi judecata nu au fost deosebite în mod adecvat pînă acum"].
(3) manifestarea acestei judecăţi — asertarea.

Noi efectuăm primul act atunci cînd formăm o propoziţie interogativă ..."[52].

Distincţia, cum se vede, aparţine *pragmaticii logice:* în ea este vorba şi despre propoziţii, şi despre gînduri, şi despre activităţi umane. Este vorba, mai precis, despre conexiunea lor.

În logica tradiţională, logica şi metalogica (inclusiv semiotica) se împletesc într-un mod indistinct. În viziunea modernă, logica şi metalogica sînt distincte, însă aflate într-o conexiune specifică. Metalogica ar fi lipsită de obiect, dacă nu ar exista logica; pe de altă parte, logica presupune metalogica, metalogica este, ca să spunem aşa, „mediul de scufundare" al logicii.

Poziţia lui Frege, după care legile logicii au un caracter obiectiv, ultrageneral, ca legi ale oricărui conţinut şi nu ca legi ale

[52] „Der Gedanke", citat după volumul „*Kleine Schriften*", 1969, p. 346.

gîndirii subiective, este destul de convingătoare. Ea evită — la Frege — hipostazierile platonice. Concepţia lui Frege despre logică apără obiectivitatea legilor logicii fără să ignore legătura dintre gînd, gîndire şi limbă. Pentru Frege, conceptelor le corespund proprietăţi şi relaţii care nu au aceeaşi independenţă, aceeaşi subzistenţă autonomă pe care o au obiectele.

Frege nu face nici o diferenţă între gîndul exprimat de o propoziţie (de exemplu, „zăpada este albă") şi *faptul* corespunzător ca zăpada este albă. Sensurile propoziţiilor sînt identificate cu stări de lucruri, fapte care au loc sau nu au loc (în care cazuri gîndul este adevărat, respectiv fals). Identificarea nu vizează existenţa unei lumi platonice ***anterioare*** realităţii concrete, ci desprinde un domeniu al realităţii diferit de cel al obiectelor materiale, diferit şi de lumea reprezentărilor subiective.

Implicaţiile platonice ale concepţiei fregeene sînt totuşi incontestabile. Cea mai importantă ni se pare următoarea. Frege nu face o distincţie de domeniu între obiectele materiale, care au realitate şi obiecte „ideale", cum sînt: numerele, punctele geometrice, valorile de adevăr, extensiunile conceptelor. Ele aparţin toate aceluiaşi domeniu. Caracterul obiectului este de a fi „complet", „saturat", spre deosebire de caracterul „nesaturat" al conceptului. — Pe de altă parte, Frege afirmă (vezi, de ex. „Die Grundlagen der Geometrie") că un concept poate fi numai distins, însă nu şi separat în mod efectiv; prin aceasta tocmai se deosebeşte un concept de un obiect. Există însă obiecte predeterminate prin concepte despre care ar trebui de asemenea să spunem că pot fi „distinse" logico-gramatical, însă nu efectiv separate din nexul faptelor. De exemplu, extensiunea conceptului, după cum spune Frege „este constituită, în fiinţa ei, nu de indivizi, ci de însuşi conceptul; adică de ceea ce este afirmat despre un obiect atunci cînd acesta este adus sub un concept"[53]; „... clasele sînt determinate de proprietăţile pe care le au indivizii din cadrul lor"[54]. Proprietăţile — respectiv conceptele — determină deci

---

[53] FREGE, „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*", „Arch. f. syst. Philosophie", 1 (1895), p. 451.
[54] *Ibidem*, pp. 452—453.

obiecte dar nu obiecte obişnuite. Dacă distincţia între entităţi „saturate" şi „nesaturate" este efectivă şi independentă de limbaj, dacă ea depăşeşte cadrul distincţiei analoge în rîndul expresiilor care le desemnează — cum crede Frege —, atunci se impune o distincţie între caracterul saturat al obiectelor obişnuite şi caracterul *ideal* al unor obiecte, printre care extensiunile conceptelor. Pe de altă parte, distincţia între entităţi saturate şi nesaturate nu poate avea caracterul absolut pe care i-o atribuie Frege, iar „obiectele ideale" nu pot avea acelaşi statut ontologic ca obiectele propriu-zise. Nerecunoaşterea acestei distincţii este — în ultimă instanţă — responsabilă de paradoxul ivit în sistemul formal al lui Frege şi implică o concepţie platonică.



Nu ne-am propus, în acest studiu introductiv, să facem o expunere şi o tratare cu caracter exhaustiv a problemelor pe care le cuprinde vasta şi profunda operă a lui Gottlob Frege.

De la Aristotel şi pînă azi nici un logician nu a făcut descoperiri atît de numeroase şi importante, acoperind o arie atît de vastă, ca Gottlob Frege. Opera sa are un caracter demiurgic; rigoarea metodei sale nu a fost egalată de contemporanii săi, ea rămînînd şi astăzi surprinzătoare.

O înnoire profundă în matematică şi logică a adus-o teoria sa despre *funcţii*. Noţiunea de funcţie logică este astăzi o piatră unghiulară la edificiul logicii moderne.

Frege este întemeietorul semanticii logice, autorul unei teorii semantice închegate şi subtile, la baza căreia stă distincţia dintre semnificaţia şi sensul expresiilor[55]. Întreaga semantică modernă porneşte de la Frege, preluîndu-l, întregindu-l sau negîndu-l.

---

[55] Pentru o expunere sistematică a semanticii lui Frege, a se vedea îndeosebi M. şi W. KNEALE, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, cap. VIII, 2 (Ed. Dacia, 1975, pp. 124—134); RUDOLF CARNAP, *Semnificaţie şi necesitate*, cap. III, § 28 (Ed. Dacia, 1972, pp. 169—176); A. CHURCH, din *Introducere în logica matematică* (în volumul „Logică şi filozofie", Ed. Politică, 1966, pp. 144—196) şi GH. ENESCU, „Semantica logică", în culegerea „Limbaj, logică, filozofie".

Frege a propus primul sistem formal al aritmeticii. Sistemul său — formal şi axiomatic — cuprinde ca subsisteme logica propoziţiilor şi logica predicatelor. Frege a introdus în logică axiomatizarea. El este părintele metodei logistice, metoda construirii sistemelor formalizate.

Frege este principalul promotor al programului logicist de deducere a adevărurilor aritmeticii din legile logicii şi de definire a ideilor matematice prin intermediul unor concepte logice.

Sistemul lui Frege cuprinde însă contradicţii; paradoxele semnalizează altceva decît un simplu viciu de construcţie, remediabil prin amendamente mai mult sau mai puţin neesenţiale. Presupoziţiile cele mai adînci ale sistemului sînt ele însele puse în cauză. Frege a sugerat o soluţie a paradoxului descoperit de Russell — cu care prilej a intuit şi alte soluţii care au fost date de alţii (chiar teoria tipurilor, apoi limitarea acţiunii legii terţiului exclus) — dar propria sa soluţie nu a putut salva sistemul. Sistemul lui Frege îşi păstrează însemnătatea istorică. Bogăţia şi noutatea problematicii, precum şi reuşita majoră în complicatele probleme legate de formalizarea logicii şi dezvoltarea ei, apoi de formalizarea aritmeticii, de justificarea ei fac din sistemul formal fregean una din creaţiile monumentale ale gîndirii ştiinţifice.

Logicismul lui Frege — program de fundamentare a matematicii — s-a dovedit irealizabil. El împărtăşeşte astfel soarta altor curente din fundamentele matematicii care au încercat ceva mai tîrziu — cu succes parţial — să împlinească ceea ce acesta nu a reuşit. Logicismul are propriile limite, eşuează ca program absolutist, însă în acelaşi timp contribuie la relevarea bazelor logice ale edificiului matematic. Deşi adevărurile matematicii nu au putut fi fundate pe adevăruri logice (în speţă, „axioma infinitului", pe care Russell s-a văzut nevoit s-o introducă, nu constituie un adevăr logic, adică un adevăr al „tuturor lumilor posibile") rămîne incontestabil faptul că matematica este formulabilă integral într-un limbaj logic.

Logicismul a jucat un rol incontestabil pozitiv în dezvoltarea logicii însăşi.

Dramatismul ascuns de care este impregnată cariera ştiinţifică a lui Frege şi care capătă din cînd în cînd (de exemplu, în

scrisorile lui Frege către Russell și în „Postfața" la al doilea volum din *Grundgesetze der Arithmetik*) accente personale, are mai multe surse: *caracterul polemic*, critic al operei lui Frege; izolarea sa în epocă, datorită orientării sale filosofice, neînțelegerii contemporanilor; dar îndeosebi faptul că Frege a creat la hotarul a două epoci.

Cu Frege și Cantor începe nu numai o nouă etapă în istoria logicii, ci și o anumită criză a logicii și fundamentelor matematicii. Rezultatul crizei este înțelegerea treptată a precarității, a caracterului provizoriu și relativ al oricărei soluții. Frege a asistat la începutul acestui proces și a resimțit dureros consecințele. Considerentele filosofice subiacente operei lui Frege, convingerile care au avut un rol euristic primordial în structurarea concepției sale logico-matematice au fost dezmințite. Este vorba în primul rînd despre convingerea lui Frege că legile logicii sînt universale, absolute, nelimitate de condiții de aplicabilitate; convingerea că logica este necondiționat una singură; că există un unic „univers al discursului", deci al obiectelor; că adevărul și falsul sînt obiecte indefinibile; că justețea unui demers (logicismul) exclude justețea și fecunditatea altor demersuri (de exemplu, formalismul). Idealul lui Frege este esențialmente clasic: a da o teorie unică și atotcuprinzătoare a logicii și a matematicii, teorie care ar exclude ca eronate orice alte teorii. Unitatea logicii este însă o unitate în varietate, o unitate a sistemelor care pornesc de la presupoziții diferite; bănuim astăzi că logica are fundamente mai adînci. Punctele de vedere din fundamentele matematicii — logicismul, formalismul, intuiționismul ș.a. — sînt complementare; ele coexistă și conlucrează. Analog, în plan metalogic, teoriile semantice sînt privite astăzi ca tot atîtea metode de analiză; ca atare, coexistența lor nu surprinde. În semantica de astăzi avem, de exemplu, mai multe teorii asupra descripțiilor. Fiecare din aceste teorii are limitele sale, punctele sale tari, punctele sale slabe.

Această perspectivă relativistă, inerentă științei contemporane, nu ne condamnă totuși la scepticism. Puține perioade din istoria logicii au înregistrat rezultate atît de bogate și durabile ca logica din ultimul secol.

„Farmecul aritmeticii — a scris cîndva Frege — rezidă în

raţionalitatea ei". Prin excelenţă raţionalistă, creaţia lui Frege în fundamente, logică şi filosofie este impregnată de acest farmec; ea aruncă punţi solide între disciplinele formale şi gîndul filosofic. Rigoarea şi bogăţia euristică îşi regăsesc unitatea. Opera fregeană stă sub semnul universalităţii.

SORIN VIERU

NOTĂ
asupra ediției

Volumul pe care cititorul de limbă română îl poate deschide astăzi este primul pas în direcția unei ediții mai cuprinzătoare de traduceri din opera marelui Frege.

Pînă în prezent, un singur articol al lui Frege a fost tîlmăcit în românește, și anume „Despre sens și semnificație“ (în antologia „Logică și filozofie“, apărută sub îngrijirea lui M. Tîrnoveanu și Gh. Enescu la Editura Politică, 1966, pp. 54—79). În antologia comentată *Fundamentele matematicii* de Oskar Becker (în românește de Alexandru Giuculescu, cu o prefață de Corneliu Vilt; Ed. Științifică, 1969) sînt incluse §§ 6, 62—65, 68 din *Grundlagen der Arithmetik*.

În afara acestor două traduceri, se pare că nu mai avem altceva de semnalat.

În schimb, sînt de semnalat cîteva articole și capitole dedicate operei fregeene, așa cum se răsfrînge ea în literatura logică românească, precum și cîteva scrieri de logică și fundamente traduse din alte limbi, pe care cititorul lui Frege le poate consulta în contextul lecturilor sale prilejuite de volumul de față.

Din prima categorie, a încercărilor de prezentare și comentare a creației lui Frege în literatura logică din țara noastră, citām:

— *Cornel Popa*, „Teoria definiției la Frege“ („Revista de filozofie“, *15*, 1, 1968, pp. 45—53).

— *Sorin Vieru*, „Însemnări despre ontologia lui Frege“ („Revista de filozofie“, *15*, 1, 1968, pp. 55—67);

— *Cornel Popa*, „Analiza limbajului la Leibniz, Boole și Frege“ (în culegerea „Limbaj, logică, filozofie“, Ed. Științifică, 1968, pp. 86—157; a se vedea îndeosebi secțiunea 3, intitulată „Limbajul artificial la Gottlob Frege“, pp. 112—155);

— *Gh. Enescu*, „Semantica logică“ (în culegerea susmenționată pp. 158—212; a se vedea îndeosebi secțiunea 5, „Teoria semantică a lui Gottlob Frege“, pp. 170—177);

— *Anton Dumitriu*, *Istoria logicii* (Ed. didactică și pedagogică, 1969); vezi cap. XL: „Gottlob Frege“, pp. 740—752).

— *Călin Candiescu,* „Predicație și cunoaștere la Gottlob Frege (kantianism și platonism)“ („Revista de filozofie“, *20*, 12, 1973, pp. 1521—1535).

Aceste referințe nu sînt exhaustive.

Dintre traduceri, semnalăm îndeosebi:

— *William Kneale* și *Martha Kneale, Dezvoltarea logicii,* vol. 2, Ed. Dacia, 1975 (a se vedea îndeosebi cap. VII — *Numere, mulțimi și șiruri;* cap. VIII — *Logica generală a lui Frege,* pp. 64—144, *op. cit.*). Nu se poate recomanda îndeajuns această istorie, într-adevăr remarcabilă, a logicii pentru o bună documentare în opera fregeană. Monumentala sinteză a soților Kneale este structurată în ansamblul ei pe aprecierea creației lui Frege ca momentul cel mai important din perioada modernă a logicii.

— *Rudolf Carnap, Semnificație și necesitate.* Un studiu de semantică și logică modală (Ed. Dacia, 1972; vezi în special cap. III — „Metoda relației de denumire“, pp. 145—196);

— *A. Church,* Din „Introducere în logica matematică“ (în culegerea „Logică și filozofie“, 1966, pp. 144—197);

— *J. Łukasiewicz,* „Din istoria logicii propozițiilor“ (în culegerea susmenționată, pp. 119—143).

— *Stephan Körner, Introducere în filozofia matematicii* (Ed. Științifică, 1965); cf. capitolele II—V, pp. 42—156).

— *Wang Hao, Studii de logică matematică* (Ed. Științifică, 1972; cf. îndeosebi cap. IV, „Axiomatizarea aritmeticii“, în *op. cit.*, pp. 74—86 și secțiunea 6 a cap. XVI — „Sistemele lui Ackermann și Frege“, pp. 401—409).

Nici aceste referințe nu sînt exhaustive.



Pentru traducerea *Fundamentelor aritmeticii* am utilizat volumul *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* ed. 1961, G. Olms in Hildesheim; am consultat totodată, reținînd unele sugestii de traducere, versiunea engleză a lui J. Austin, *The Foundations of Arithmetic* (Oxford, Blackwell and Mott, 1953; ediție bilingvă).

Pentru traducerea celorlalte trei articole incluse în culegerea de față am utilizat culegerea de articole G. Frege: *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien* editată de G. Patzig,

Göttingen: Vandenhoek Ruprecht, 1962 și *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli (Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967). Am consultat totodată versiunea engleză *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* a lui P. Geach și M. Black (Oxford, Blackwell, 1960).

Pentru *Notițele introductive, Note, Studiul introductiv* și *Tabelul cronologic* am consultat, în afara edițiilor sus-amintite, următoarele surse fregeene:

— *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 2. Auflage. Mit E. Husserls und H. Scholz Anmerkungen, herausgegeben von Ignacio Angelelli (Georg Olms, Hildesheim, 1964);

— *Conceptual Notation and Related Articles*, translated and edited with a Biography and Introduction by Terrell Ward Bynum (Oxford, Clarendon Press, 1972);

— *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* I, II (într-un singur volum, G. Olms, Hildesheim, 1962);

— *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg. von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Erster Band: *Nachgelassene Schriften* (Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969).

Nu am avut posibilitatea de a consulta volumul II, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, al ediției menționate mai sus.



Sursele bibliografice secundare utilizate pentru Studiul introductiv, Notițe introductive și Note au fost menționate în cuprinsul acestora din urmă precum și în referirile de mai sus. Trebuie spus că nu am avut accesul decît la o parte relativ restrînsă din imensa bibliografie fregeană; într-o *Frege Bibliography, 1873—1966* alcătuită de Terrell Ward Bynum și Aline W. Bynum (în volumul *Conceptual Notation*... menționat mai sus, pp. 239—287), se citează 306 surse secundare, precum și alte 176 surse adiționale; în deceniul 1967—1976 bibliografia fregeană s-a îmbogățit cu sute de noi titluri.



În alcătuirea culegerii de față și în proiectul viitoarelor volume nu ne-am ghidat după criteriul cronologic. Astfel, a doua carte

a lui Frege, *Fundamentele aritmeticii*, apare în traducere înaintea cărții de debut *Scrierea conceptuală (Begriffsschrift)*. Motivul? Dorința de a deschide cititorului o cale cît mai accesibilă de acces la operă în totalitatea ei ne recomanda să operăm astfel, dat fiind că aspectul rebarbativ al dezvoltărilor simbolice atît de personale din *Begriffsschrift* îl putea descuraja pe cititorul de filosofie. Sperăm, dimpotrivă, că orice cititor al *Fundamentelor aritmeticii* va dori să citească mai dificila *Scriere conceptuală;* jocul cu mărgele de sticlă al simbolurilor și încrengăturile grafice succedate pe pagini întregi le-am lăsat, așadar, pentru următorul volum care, după intenția noastră, ar urma să grupeze *Begriffsschrift*, cîteva articole ale lui Frege gravitînd în jurul problematicii de acolo precum și o traducere nouă a memorabilului „Sinn und Bedeutung".

Structura volumului de față pune în lumină logicismul lui Frege și teoria cu privire la funcție, concept și obiect ca aspecte centrale ale teoriei sale logico-filosofice. Studiul introductiv nu și-a propus nici el să cuprindă integral și într-un dozaj proporționat cu justețe opera lui Frege în ansamblu; de aici, insistența cu care ne oprim asupra teoriei despre funcție, concept și obiect, sau relativa neglijare a semanticii sau a altor componente fundamentale ale viziunii fregeene, cărora dorim însă a le face dreptate în viitoarele volume.

Sperăm că această culegere va interesa pe iubitorul de filosofie, va sluji interesul său istoric și sistematic pentru filosofia logicii și matematicii ca parte integrantă a gîndirii ultimului veac și ca torță ce luminează subteranele științelor formale. Cititorul contemporan, documentat prea bine asupra iluziilor panlogismului și logicismului, știe totuși că filosofia logicii și matematicii nu este o fundătură periferică, ci o cărare de acces obligată la magistrala filosofiei științifice. Cîteva pietre unghiulare din drumul în spirală al filosofiei științei au fost așezate tocmai aici, la hotare care despart dar totodată leagă ca o punte domeniul întrebărilor integratoare de acela al răspunsurilor pe porțiuni înguste, leagă filosofia și știința. Se înțelege deci că nu numai istoria logicii ci și aceea a filosofiei are îndreptățirea să-l revendice pe Frege.

Nici o așteptare și nici o deschidere nu trebuie lăsate la

intrare de către cel ce se încumetă să pășească pe tărîmul filosofiei științelor exacte. Așteptările și deschiderile către problematica ființei umane nu sînt trădate de acea punere provizorie între paranteze pe care o reprezintă un demers filosofic ca acela fregean. A face abstracție nu înseamnă — în perspectiva unei totalități în devenire, cum este istoria filosofiei — a suprima concretul viu, ci a croi o cale de acces către acesta. Ultimul sfert al acestui secol nu va face, desigur, decît să repete lecția ultimului sfert de mileniu, și anume că logicianul sau matematicianul nu sînt specializări ale omului înstrăinat de sine decît în măsura în care omul însuși este înstrăinat de sine; în fapt, logicianul și matematicianul ar trebui să fie — și cu certitudine vor ajunge să *fie* — oricare dintre noi, personificări ale omului activ, deschis către lume și propria-i sine.

În *acest* spirit citindu-l pe Frege, aspirația umanistă a iubitorului de filosofie nu va fi nici trădată, nici înșelată, ci slujită cu temei și pe termen lung.

S.V.

SCRIERI LOGICO-FILOSOFICE

FUNDAMENTELE ARITMETICII

O CERCETARE LOGICO-MATEMATICĂ ASUPRA CONCEPTULUI DE NUMĂR[1]

NOTIȚĂ INTRODUCTIVĂ

Prin această carte, de proporții modeste dar de încărcătură densă, logica își mărturisește o nouă vocație: aceea de a funda matematicile, lămurind prin intermediul unor definiții riguroase conceptele primitive ale aritmeticii. Aportul ei urma acum să stea nu doar în *metodă*, ci în însuși *conținutul* infuzat matematicilor. Căci acesta este logicismul: un program menit să asigure fundamente ferme dar nu autonome unei științe care s-a putut mîndri întotdeauna cu certitudinea absolută a rezultatelor și relativa rigoare a metodelor însă nu a putut da seama pînă la capăt de propriile-i fundamente. Numerele sprijină edificiul aritmeticii, și pînă la urmă — activitatea reducționistă a matematicienilor ajunsese să dovedească acest punct delicat — sprijină întreaga disciplină. Căci pînă și figura și mișcarea, timpul adică și spațiul, sînt reductibile la număr, prin aritmetizarea analizei și algebrizarea geometriei. Ce sînt însă chiar numerele întregi, acești Atlanți pe care se sprijină cosmosul matematic? În a doua jumătate a secolului XIX, întrebarea devenea tot mai presantă Într-adevăr, fusese întrevăzută deja calea prin care numerele complexe își găsesc interpretarea lor în planul geometric, reducîndu-se într-un fel la numărul real (Gauss); numărul real se poate construi din șiruri, sau din mulțimi de numere raționale (Weierstrass, Dedekind, Cantor); numărul rațional și numărul negativ se reduc și ele — prin raportare — la numărul întreg. Geometria însăși nu mai părea o lume autonomă; dacă intuiția spațială este un dat ireductibil (Kant), limbajul geometriei este în schimb traductibil în acela al algebrei mărimilor (Descartes), ba chiar al algebrei abstracte a structurilor (Klein, Programul de la Erlangen). Grație racordului făcut, fundarea geometriei și analizei ajunge să depindă într-un mod evident de fundarea aritmeticii.

În cartea sa, Frege afirmă: rigoarea demonstrațiilor nu este suficientă spre a funda aritmetica, fără a mai vorbi de faptul

că însăşi această rigoare matematică nu a fost atinsă. Un sfert de secol mai tîrziu, atunci cînd idealul rigorii demonstrative va fi asociat intim demersului formal-axiomatic, Frege va accentua că însăşi axiomatizarea, sprijinită pe logica matematică, nu asigură fundamentele unei discipline cum este geometria; se mai cere evidenţa adevărurilor prime, clara şi distincta percepere a ideilor primare, inteligibilitatea nepusă în paranteze a conţinuturilor. Frege nu l-a înţeles pe Hilbert, implicit deci nu priveşte matematica în termeni de structuri şi modele. Şi totuşi, nici un adversar al acestei din urmă viziuni nu va fi contribuit mai mult la implantarea ei în viaţă prin asumarea unor obiective şi făurirea unor instrumente perfecţionate. Aşa cum în viaţa socială o tehnologie nouă poate să apară într-un cadru inadecvat de relaţii şi instituţii, determinînd pînă la urmă înlocuirea lui, tot astfel proiectul logicist imaginat de Frege s-a putut autodizolva în ansamblul demersurilor fundaţioniste, găsindu-şi validarea în călătoria spre ţel şi nu în atingerea scopului ultim, în tehnologia intrinsecă şi nu în folosinţa în imediat. Cu alte cuvinte, ca de atîtea ori, relaţia dintre scop şi mijloace se inversează.

În ce constă însă, mai exact, acest proiect logicist, aşa cum îl găsim încorporat în *Fundamentele aritmeticii*? Şi în ce măsură călătoria lui Frege către o ţintă — cum s-a dovedit — iluzorie constituie un episod semnificativ în istoria raţiunii?

Lucrurile se întîmplă în deceniul în care în mintea genială a lui Cantor gestează teoria mulţimilor, aritmetica numerelor infinite şi definiţia numărului cardinal, iar Dedekind pregăteşte şi el o explicaţie asupra numărului ordinal şi a numărului cardinal (*Was sind und was sollen die Zahlen?* apare în 1887), pornind de la ceea ce astăzi numim mulţimi şi corespondenţe sau aplicaţii biunivoce; către sfîrşitul aceluiaşi deceniu Peano va formula sistemul de axiome ale aritmeticii; axiomele aritmeticii, dealtfel, inclusiv principiul inducţiei matematice, se găsesc deja la Dedekind. Axiomatizarea aritmeticii dar, mai presus, analiza logică a ideilor fundamentale ale aritmeticii, reducerea lor la idei încă mai elementare pluteau aşadar în aer. De asemenea, nu puţini erau matematicienii care meditau asupra numărului şi mulţimii, chiar dacă nu la acest nivel de vîrf. Aşadar, cartea lui Frege apare într-un moment în care sensul general al demer-

sului — reducerea numărului *via* definiții la concepte mai elementare — prindea contururi.

Va trebui totuși să treacă multă vreme pînă cînd încercările solitare să se găsească unele pe altele și să-și recunoască fondul comun. Marele învins al acestei perioade este Frege; validarea lui va veni tîrziu și în etape. Deocamdată, la data apariției, cartea trece puțin observată. Într-o recenzie, Cantor găsea justă orientarea filosofică generală a cărții, pertinente observațiile critice de natură filosofică dar se cantona în observații minore, neesențiale asupra deosebirii dintre ceea ce el numește *Mächtigkeit* și ceea ce este pentru Frege numărul cardinal, *Anzahl;* Cantor sfîrșea prin a contesta valabilitatea definiției fregeene a numărului: se pare că întemeietorul teoriei mulțimilor nu a înțeles sensul definiției lui Frege și — ceea ce este mai frapant! — nu a întrevăzut echivalența definiției sugerate de Frege cu propria sa definiție. La fel, a doua reacție deconcertantă în epocă, la cartea lui Frege, este aceea a lui Husserl: în *Philosophie der Arithmetik,* Bd. I (1891), tînărul filosof găsește că *Fundamentele aritmeticii* sînt rodul unei subtilități exersate în gol, distincțiile fregeene fiind penetrante, însă nesemnificative. Ca și în cazul lui Cantor, observațiile critice vădesc neînțelegere și Frege a putut răspunde criticilor săi cu argumente solide. În rest, se mai poate consemna doar reacția lui Benno Kerry; reluînd problema distincției obiect-concept, acesta i-a dat astfel lui Frege prilejul de a dezvolta în „Über Begriff und Gegenstand" cîteva aspecte dificile ale teoriei sale logico-filosofice.

Noul revoluționar întîmpină prea des rezistență; memoriile matematice ale lui Georg Cantor reprezintă unul din cele mai dramatice ilustrări ale destinului geniului. Neînțelegerea contemporanilor față de Prometeii cunoașterii este acel vultur din mit care devorează zi de zi pe eroul înlănțuit. În limbajul unui mit mai realist al zilelor noastre ar trebui să vorbim — cu un alt cuvînt elin — despre *paradigme:* Cantor și Frege luptau pentru afirmarea unei paradigme noi, întru totul străină modului primit, educat, de a vedea lucrurile, inerent majorității zdrobitoare a membrilor unei comunități științifice.

Dar dacă un Plutarh modern ar scrie cumva *Viețile paralele și interferate ale oamenilor iluștri din științe și arte,* afinitățile

şi contrastele dintre Cantor şi Frege, dintre oameni şi opere i-ar putea oferi prilejul unor dezvoltări retorice. Iată, de pildă, dacă comparăm primirea contemporanilor: Cantor stîrneşte adversităţi, suspiciuni, patimi, aderenţe şi refuzuri nete, totuşi nu se poate spune că lumea matematică manifestă indiferenţă faţă de mesajul său; Frege rămîne însă un solitar.

Cu *Fundamentele aritmeticii* s-a petrecut tot ce poate fi mai rău: la apariţie, cartea lui Frege este înconjurată de o masivă indiferenţă, de o neînţelegere fără relief. Frege se temea — şi lucrurile se vor repeta zece ani mai tîrziu cînd dă la iveală primul volum al *Legilor fundamentale ale aritmeticii* — tocmai de această indiferenţă. Cînd medităm asupra cauzelor opacităţii manifestate înăuntrul unei culturi în care matematica, filosofia şi logica erau cultivate ca nicăieri în altă parte, nu mai putem da vina pe simbolismul neobişnuit al *Scrierii conceptuale;* căci în 1884, la cinci ani după experienţa negativă cu prima sa carte, Frege încearcă să găsească o audienţă cît mai largă, renunţînd la un sistem de notaţii rebarbativ. El scrie adînc, limpede, sistematic, cu vii sclipiri polemice. Dar noutatea revoluţionară este trecută cu vederea de publicul savant al vremii, puţin dispus să se cufunde în subtilităţile unui autor ciudat, care scrie nematematic dar şi nespeculativ despre matematică. Cum să explicăm deci neînţelegerea? Răspunsul l-ar putea da doar un eseu care să treacă în revistă diferiţii factori care intră în joc, personali, interpersonali şi comunitari. Aici vom aminti mai intîi faptul că Frege se adresează în acelaşi timp matematicienilor, filosofilor şi logicienilor; însă un mesaj adresat mai multor comunităţi intelectuale poate fi receptat, la început, numai la intersecţia mulţimilor respective, adică într-un mediu extrem de restrîns. Audienţa devine şi mai restrînsă atunci cînd mesajul este nonconformist, violentează habitudinile intelectuale, paradigmele instaurate. Or, Frege luptă împotriva unor adversari influenţi: logica psihologistă a vremii şi „concepţiile naive despre număr". Nu numai atît: dacă Frege nu putea găsi înţelegere la un public educat în spiritul logicii tradiţionale, el are dificultăţi în a impune şi în rîndurile adepţilor „Noii logici" reprezentată de algebra booleană, noua paradigmă a logicii predicatelor şi metoda analizei filosofice intemeiată pe această logică (metodă aplicată,

de exemplu, în analiza conceptului de existenţă, în teoria descripţiilor şi definiţia numărului). Raţionalismul filosofic impregnat de realism, neînregimentarea în una sau alta din direcţiile filosofice influente ale vremii, atacul împotriva confuziei naturaliste între psihologie şi logică, profunzimea concepţiilor lui Frege — toate au contribuit la lipsa de succes în imediat a *Fundamentelor aritmeticii*, tot atît de mult ca şi la asigurarea valorii perene.

Fundamentele aritmeticii au fost „descoperite" în zorii secolului nostru de către Bertrand Russell, adică tocmai de către un reprezentant prin excelenţă al acelui public interesat în acelaşi timp de filosofie, logică şi matematică; definiţia numărului, teoria descripţiilor, analiza logică în calitate de instrument al filosofiei au trebuit să treacă prin filtrul russellian spre a deveni apanajul unui cerc mai larg. Încă şi astăzi nu puţini sînt cititorii — între ei, logicieni şi filosofi de vază — care tind să atribuie lui Russell întrebări ce au fost puse pentru întîia oară de către Frege, soluţii pe care profesorul de la Jena le-a preconizat înainte ca analistul englez să le fi dat o altă coloratură filosofică, o destinaţie, o dezvoltare şi un context cu totul schimbat. Autorul teoriei tipurilor a văzut pe drept cuvînt în Frege un precursor şi un inovator revoluţionar în domeniul fundamentelor matematicii şi al analizei logice. Nu vom merge atît de departe încît să afirmăm, cu o vorbă împrumutată de la şi despre alţii, că dezvoltările date de Russell sînt simple „note de subsol" la filosofia lui Frege; ne vom mărgini să afirmăm că o lectură a *Fundamentelor aritmeticii* este actul de dreptate al întoarcerii la sursă, cu efectul întineritor pe care îl are întotdeauna scăldarea la izvoarele gîndului. O întreagă direcţie influentă a filosofiei de astăzi — reprezentată de Russell, în unele perioade ale evoluţiei sale, Wittgenstein din *Tractatus*, Carnap şi Church *qua* logicişti ş.a. — porneşte de aici nu în prelungire liniară, ci în sinuoasă curgere. Suflul raţionalist, realist al cărţii aparţine unei epoci optimiste, care nu presimţea dificultăţile din fundamentele matematicii, frîngerile intelectuale şi dilemele filosofice. Şi totuşi, acest suflu filosofic izbuteşte să ajungă la noi, semn al energiei sale intrinseci, punînd în mişcare morile de vînt ale analizei filosofice şi convertindu-se în alte forme de energie intelectuală.

În *Notele* aferente textului fregean ne-am străduit să punem în lumină detaliile cele mai revelatoare ale filosofiei și logicii lui Frege. Aici vom încerca unele observații și date care pot structura lectura ***Fundamentelor aritmeticii*** după criterii esențiale.

1. Definiția logico-matematică a numărului întreg pozitiv este obiectivul central al cărții. Partea a IV-a oferă și fundamentează răspunsul: fiecare număr întreg (Anzahl) este un *obiect*, și anume un *obiect **al logicii***; fiecare număr este sfera unui concept definit la rîndul său pe baza unei relații între concepte. Orice număr luat în parte este sfera unui concept de forma „echinumeric cu conceptul F", unde F rămîne a fi determinat, în continuare, pentru fiecare număr. Frege arată totodată că îl putem determina pe F în calitate de concept pur logic, definindu-l prin intermediul relației de identitate, cuantorilor, negației și conectivelor propoziționale. Astfel, numărul zero este sfera conceptului „echinumeric cu conceptul de a fi neidentic cu sine", sferă care înglobează toate conceptele echinumerice cu conceptul de a fi neidentic cu sine însuși. Dar conceptele sînt echinumerice atunci cînd obiectele din sferele lor pot fi puse în corespondență biunivocă, adică într-o relație definibilă ea însăși în termeni logici. Așadar, numărului zero îi aparțin ca elemente toate conceptele care pot fi puse în corespondență biunivocă cu conceptul determinat prin expresia „x nu este identic cu x" (sau ceva analog), deci conceptele sub care nu cade nici un obiect. Numărul zero este atunci ceea ce au comun toate conceptele de sferă vidă: putem spune aceasta, dacă prin „ceea ce au comun" nu vom înțelege totuși un concept ***stricto sensu***, ci un ***obiect abstract***; ceva este recunoscut ca obiect dacă apare desemnat printr-o expresie care admite articolul hotărît și poate fi subiectul unei propoziții singulare, dar nu poate fi predicat. Mai departe Frege îl definește pe 1 pe baza numărului zero, ca fiind extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero»", îl definește pe 2 ca fiind sfera conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero sau identic cu unu»" și arată cum, în general, odată definit un număr ***n*** îl putem defini pe succesorul său. Dacă fiecare număr în parte este un obiect, ele toate cad sub conceptul general de număr, pe care Frege îl explică, definind apoi relația de succesiune în cadrul șirului numerelor naturale și

demonstrînd logic unele proprietăţi elementare ale şirului numerelor naturale şi principiul inducţiei matematice. Operaţiile aritmetice elementare (adunarea, înmulţirea şi inversele lor) nu mai sînt definite, dar Frege avea sentimentul că reducerea întregii aritmetici la logică este pe calea cea bună, ea devenind prin intermediul definiţiei logico-matematice a numărului extrem de probabilă. Mai rămînea să se demonstreze pe cale pur logică teoremele aritmeticii, obiectiv căruia Frege i-a rezervat a treia sa carte, pregătită îndelung, *Grundgesetze der Arithmetik*.

Această privire din avion asupra definiţiei fregeene a numărului poate da călătorului neavizat sentimentul că sub el defilează priveliştile neobişnuit de austere ale unei planete străine. Impresia de insolit se poate şterge într-o oarecare măsură, străbătînd pas cu pas itinerarul fregean, familiarizîndu-ne cu detaliile şi convingîndu-ne că drumul duce într-adevăr la ţintă şi nu în cine ştie ce abisuri ale inconsistenţei ori ininteligibilităţii. Dar întrebarea este dacă la capătul călătoriei — valoroasă, oricum, prin solicitările impuse, învingerea dificultăţilor fiind în sine o răsplată a efortului depus — ajungem să regăsim peisajul familiar al aritmeticii de toate zilele, să regăsim *die Kleinkinderzahlen* — cum obişnuia să spună Frege —, aşadar dacă ceea ce s-a definit sînt într-adevăr numerele întregi aşa cum credeam a le şti. Abia după aceea sîntem în măsură să ne întrebăm dacă definiţia numerelor a apropiat de realizare programul logicist al reducerii la logică a aritmeticii.

Lăsînd la o parte obiecţia de-a dreptul eronată după care definiţiile ar cuprinde o circularitate, întrucît, de exemplu, în definiţia numărului unu intervine expresia „există cel puţin un . . ." — o asemenea obiecţie vădeşte numai regretabila neînţelegere a logicii — mai rămîne să ne raportăm la impresia genuină a oricărui cititor că definiţia numărului *n* este neaşteptată, corespunde prea puţin reprezentărilor şi aşteptărilor noastre, intuiţiilor noastre neprevenite, că este de o lungime disproporţionată, iar pentru un *n* moderat de mare definiţia *detaliată* a numărului se dovedeşte nemoderat de lungă, în cuprinsul ei intrînd, de exemplu, disjuncţia a *n* clauze propoziţionale şi alte operaţii. Obiecţia nu este totuşi atît de gravă pe cît pare la prima vedere. Putem răspunde, amintind că felul obişnuit de a înţelege numărul *n* ca

ocupînd al $n+1$-lea loc în șirul numerelor naturale 0, 1, 2, ... n, sau ca generat prin adunarea succesivă de n ori a unei unități la numărul zero nu comportă mult mai puțini pași; în ambele cazuri, simplității aparente a numărului îi ia locul o complexitate. Menirea *analizei* logice este tocmai să substituie simplității aparente a elementelor unui sistem cum este șirul numerelor naturale complexitatea elementelor constitutive, asamblate în ordinea lor intrinsecă, să înlocuiască fiecare element prin tot atîtea microcosmosuri perfect structurate și asamblate înăuntrul sistemului regăsit ca macrocosm. Într-un cuvînt, analiza logică trebuie să ofere *un model;* acest obiectiv, indubitabil, a fost atins.

2. Răspunsul la obiecția de mai sus conduce însă direct la alta, de o natură diferită. Dacă un apologet al demersului fregean ar afirma că matematicianul de la Jena a urmărit să dea prin analiză logico-matematică *un model* al sistemului numerelor naturale, i s-ar putea răspunde că afirmația sa caracterizează mai curînd rezultatul efectiv decît obiectivul scontat inițial; este prea exact că Frege dă *un model* al sistemului numerelor naturale, prin intermediul definițiilor sale, însă ceea ce urmărea el era nu *un model*, ci — ca să spunem așa — *Modelul* însuși, Modelul arhetipal și unic, reducția echivalentă cu Adevărul Absolut. Acest obiectiv nu poate fi socotit atins, de vreme ce dispunem astăzi de mai multe definiții echivalente, însă diferite ale numerelor naturale, și de vreme ce aceste definiții sînt formulabile în limbajul teoriei mulțimilor, ca alternativă la logica de ordin superior de care făcea uz Frege. Astfel, rămînînd în sfera teoriei mulțimilor, una din definițiile propuse îl definește pe O ca pe mulțimea vidă Ø, iar pe $n+1$ ca pe mulțimea care conține ca unic element mulțimea n; o altă definiție bine cunoscută îl definește pe zero ca mulțimea vidă, $O =_{df} \emptyset$, iar pe $n+1$ ca pe mulțimea conținînd ca elemente toate numerele pînă la n inclusiv. În mod mai general, dificultatea poate fi asociată de sistemul axiomelor Dedekind-Peano pentru aritmetica elementară: sistemul caracterizează o clasa întreagă de modele izomorfe cu șirul numerelor naturale, inclusiv modele non-standard. Ce *este* deci fiecare număr natural în parte nu a fost arătat prin axiomatizarea formală a aritmeticii decît parțial; în măsura în care sistemul numerelor naturale mai are proprietăți netriviale pe care nu le are

vreun alt sistem de obiecte care satisface aceleași axiome, și în măsura în care asemenea proprietăți ar deriva din însăși natura elementelor componente, adică din presupusa natură intimă a numerelor naturale, se poate spune că nici caracterizarea axiomatică, nici definițiile lui Frege nu-și ating ținta. Unei asemenea întîmpinări grave nu i se poate răspunde cu dezinvoltura cu care am putut face față obiecției anterioare. Aici, într-adevăr, intrăm în zona întrebărilor de răspîntii.

Dificultatea gnoseologică de care ne ciocnim confruntînd definiția logico-matematică a numărului pe care o dă Frege cu tot ce a adus evoluția ulterioară se despică în două întrebări fundamentale.

Mai întîi, putem lega soarta reducției logiciste de aceea a sistemului Dedekind-Peano, observînd că Frege nu a făcut decît să analizeze mai departe termenii primitivi ai sistemului formal al aritmeticii și să releve complexitatea ascunsă a obiectelor din orice model al acestuia. În pofida aparențelor, Frege nu a împins — și cum ar fi putut? — analiza sa *formală* dincolo de punctul care ar permite caracterizarea modelului-standard al aritmeticii formale ca distinct de celelalte modele non-standard, în măsura în care demersul angajează axiomele și teoremele aritmeticii, adică adevărurile ei intrinseci. Desigur, el vorbește despre numere ca despre obiecte determinate avînd proprietăți bine definite, dar toate definițiile și teoremele sale poartă un caracter *formal*, dincolo de limita la care Frege credea și dorea să ajungă. Altfel spus, pentru Frege, caracterul *formal* este identificat cu natura *pur logică* a conținutului conceptual pus în joc, însă nicidecum nu cu posibilitatea *mai multor interpretări*. Aplicațiile sau exemplificările definițiilor și enunțurilor aritmetice — *id est* logice — pot fi oricît de multe, credea Frege, însă nu în înțelesul că ar accepta varii interpretări, angajînd astfel conținuturi conceptuale distincte. Or, existența mai multor modele ale sistemului formal incomplet al aritmeticii ne împinge tocmai să ne întrebăm dacă numerele mai sînt caracterizabile și altfel decît prin axiomele aritmeticii; definițiile aferente nu împing această caracterizare mai departe, ele stabilesc o legătură între aritmetică și logică (sau teoria mulțimilor) dar nu ne permit să dis-

criminăm între elementele modelului-standard şi elementele celorlalte modele. Sau, pentru a nuanţa, în măsura în care sînt epurate de orice element intuitiv, prin trecerea lor în limbajul formulelor, ele admit *eo ipso* traduceri felurite nesinonime dar perfect „echivalente".

În al doilea rînd, făcînd abstracţie de limitele intrinseci ale reducţiei aritmeticii la logică şi mîngîindu-ne cu gîndul că, oricum, ea a relevat complexitatea nebănuită a numărului, pune pe gînduri autenticitatea reducţiei. Aritmetica a fost tradusă în limbajul subiacent — al cărei discipline? — Al teoriei mulţimilor, înclină îndeobşte să răspundă matematicianul obişnuit; distincţiile introduse de Frege rămîn pentru majoritatea autorităţilor în materie simple subtilităţi care nu pot anula identitatea de esenţă între teoria mulţimilor şi logica predicatelor de ordin superior cu identitate. (Într-adevăr, traducerea aritmeticii în limbajul logicii reclamă folosirea predicatelor de ordin superior). Este însă identică teoria mulţimilor cu logica? Altfel spus, este teoria mulţimilor varianta pur extensivistă a logicii? Sau trebuie să rămînem ferm la punctul de vedere fregean după care primatul conceptului asupra extensiunii sale merge pînă acolo încît devine cu neputinţă a mai vorbi despre mulţimi ca despre obiecte bine definite, în absenţa predicatelor prin intermediul cărora sînt introduse? — Pe de altă parte, *ce este logica?* Nu puţini filosofi s-au îndoit de faptul că logica de ordin superior are dreptul de a se numi logică în acelaşi sens plenar în care este logica predicatelor de ordinul 1 fără identitate. Şi, în al treilea rînd, chiar dacă acceptăm fără vreo reticenţă ca logică pură teoria tipurilor (*id est* o logică de ordin superior evitînd paradoxele cunoscute) validarea reducţiei aritmeticii la logică întîmpină un obstacol din altă parte: cu toate că aritmetica se traduce integral în limbajul teoriei tipurilor, unele axiome presupuse de sistemul formal al aritmeticii nu sînt scheme valide, adevăruri logic-necesare, a căror negare ar crea vreo inconsistenţă formală. Ca atare, aritmetica ar fi logică numai dacă extindem nepermis înţelesul cuvîntului „logică"; în fapt, ea nu s-ar contopi, ci doar s-ar intersecta pe porţiuni largi cu logica propriu-zisă; graniţele acesteia din urmă ar fi, dealtfel, imprecise.

Toate aceste întimpinări şi dubii justificate învederează amurgul programului panlogist — căci logicismul reprezintă tocmai un splendid panlogism filosofic învestit cu aparenţele ştiinţificităţii —, dar nu ştirbesc cu nimic însemnătatea cuceririlor lui Frege în logică şi filosofia matematicii.

3. Efortul lui Frege trebuie evaluat nu doar prin prisma rezultatului fundamental, legat de definiţia numărului, oricît de însemnat ar fi însuşi acesta. La o dreaptă măsură ajungem numai cîntărind în sine rezultatele privite de Frege însuşi ca simple mijloace. El făcea logică în vederea asigurării unor fundamente trainice edificiului matematic; însă el nu a apelat la o concepţie preexistentă, ci şi-a făurit, printr-un efort titanic, instrumentele de care avea nevoie. Pentru logică şi filosofie, scrierea lui Frege are o semnificaţie mai mare chiar decît pentru fundamentele şi filosofia matematicii.

Împreună cu anterioara *Scriere conceptuală* din 1879, *Fundamentele aritmeticii* inaugurează un *nou stil* în filosofia matematicii; ele recomandă *analiza logică exactă* a conceptelor şi propoziţiilor, logica matematică cu întreg alaiul ei de criterii şi idei teoretice, ca pe un ingredient esenţial al reflecţiei filosofice asupra matematicii. Logica devine curea de transmisie între proiectul filosofic şi creaţia matematică. După ce, graţie algebrei logicii, străvechea disciplină ctitorită de Aristotel işi dovedise capacitatea de înnoire prin *receptarea* instrumentului matematicii, acum vine să arate că are tot atîta de dat cît de primit, ca într-o autentică *Filie:* un Platon *redivivus* ar putea exemplifica prin restituţia creatoare a datoriei contractate de logică conceptul ideal al prieteniei.

Independent de adoptarea sau respingerea punctului de vedere logicist, logica ajunge efectiv *Organon* al fundamentelor şi filosofiei matematicii: Nu numai ca instrument esenţial al metamatematicii în sens hilbertian, nu numai ca mijloc al construcţiei sistemelor formale şi chiar ca parte constitutivă — subsistem — al acestor sisteme, ci şi ca mediu deosebit de prielnic reflexiei filosofice. Dacă mai adăugăm aportul la filosofia logicii şi la logica formală propriu-zisă, *Fundamentele aritmeticii* apar ca una dintre cele mai bogate desfăşurări de gînd produse de secolul XIX la confinele logicii, filosofiei şi matematicii. Într-o enumerare

incompletă am putea menţiona, în această ordine de idei, distincţia concept-obiect argumentată de Frege ca bază teoretică a formalizării termenilor generali în logica predicatelor, teoria descripţiilor, analiza conceptului de „existenţă" cu aplicare la „argumentul ontologic", infirmat pe temeiuri logice, metoda definiţiilor prin abstracţie, descifrarea conţinutului formal al „determinării numerice" (Zahlangabe), ca stînd în aplicarea unui număr la un concept, metoda generală de desprindere a conceptelor şi relaţiilor din forme propoziţionale cu variabile libere ş.a. Sperăm că am stăruit suficient în cuprinsul *Notelor* însoţitoare asupra acestor inovaţii, pentru ca acum să ne fie îngăduit a trece mai departe, la elementul propriu-zis *filosofic* al gîndirii lui Frege.

4. Metoda fregeană a analizei logice creşte pe temelia unei *filosofii* a logicii, matematicii şi limbajului ca dintr-un sistem de rădăcini bine ramificate şi împlîntate în solul unui raţionalism consecvent, al unei epistemologii alimentată de problematica marilor filosofii ale lui Leibniz şi Kant. După cum va remarca lesne cititorul, întrebarea fundamentală de la care pleacă matematicianul german poartă nu asupra fiinţei lumii, ci asupra cunoaşterii logico-matematice; în joc intră *natura judecăţilor matematice:* sînt adevărurile matematicii analitice ori sintetice *a priori?* Cum se vede, întrebarea este formulată în termenii lui Kant. Acestor termeni kantieni, Frege le conferă însă un sens revizuit. Distincţia analitic-sintetic este legată de distincţia epistemologică sensibil-raţional (logic), pe cînd distincţia *a priori — a posteriori* poartă asupra justificării intrinseci a conţinuturilor judecate, şi nu asupra condiţiilor în care se mişcă cunoaşterea ca operă a subiectului uman. Epurînd ca psihologiste orice preocupări legate de geneza cunoaşterii subiective, ceea ce mai rămîne pentru epistemologie este fundarea conţinutului obiectiv. Totodată, analitic este pentru Frege orice adevăr derivat exclusiv din legile fundamentale ale logicii şi din definiţii, în timp ce sintetică este orice propoziţie în al cărei conţinut intră un element factual, non-logic. Propoziţiile geometriei sînt sintetice *a priori*, cele ale logicii însă analitice; judecăţile aritmeticii sînt analitice dacă şi numai dacă aritmetica este reductibilă la logică. Ipoteza logicistă a lui Frege comandă bateria argumentelor filosofice din *Scrierea conceptuală* şi *Fundamentele aritmeticii*, critica îndreptată împotriva unor con-

cepții tradiționale despre număr și adevăr aritmetic. Frege respinge empirismul lui Mill, „aritmetica pietricelelor și a turtelor dulci", argumentînd că numărul nu are o esență fizicală, nu caracterizează agregatele fizice, ci conceptele. Universala aplicabilitate a numărului desfide orice încercare de a trage din sectorul restrîns al aplicațiilor la colecțiile fizice vreo informație asupra naturii lui intrinseci. Așa cum mulțimile însele nu sînt grămezi de obiecte, ci abstracții determinate prin concepte — altfel, „mulțimea vidă" nu ar avea sens, iar mulțimea cu un singur element ar fi însuși elementul —, tot așa numerele nu sînt mulțimi de unități, ci obiecte logice determinate prin concept — altfel zero nu ar avea sens, iar unu nu ar fi propriu-zis număr, cum credeau și elinii. La fel de hotărît respinge Frege concepția „formală" care identifică numărul cu un simbol al cărui conținut ar fi dictat arbitrar. În schimb, Frege acceptă teza leibniziană a analiticității adevărurilor aritmetice. În spiritul epistemologiei raționaliste, Frege s-a străduit să separe elementul logic de acela factual, să separe rațiunea de sensibilitate, sub cuvînt că orice unire a lor ar însemna o imixtiune a psihologicului în sfera logicului.

Împotriva lui Kant și mai aproape de Leibniz, el accentuează că rațiunii îi pot fi date obiecte, independent de sensibilitate. De Kant, Frege se desparte și prin distincția tranșantă operată între concept și reprezentare, distincție echivalentă în ochii profesorului de la Jena cu aceea între obiectiv și subiectiv în cunoaștere, și astfel între logic și psihologic. În sfera obiectivului, distincția nu mai puțin importantă trasată între concept și obiect este de natură pur logică, cu importante consecințe pentru teoria logică, practica formalizării și filosofia limbajului. O altă distincție de importanță majoră, de asemenea plasată în sfera obiectivului, vine să se adauge, colorînd ontologic întreaga concepție: distincția între ceea ce are (numai) obiectivitate și ceea ce are (pe deasupra) realitate. Obiectele lumii materiale, date sensibilității, au realitate, în timp ce conceptele și obiecte abstracte în genul numerelor, mulțimilor, sau, de exemplu, linia ecuatorului, au numai obiectivitate, dar nu realitate. Obiectivitatea, Frege o înțelege în două sensuri, fie ca existență în afară de subiect, fie ca însușire de a fi „același pentru toți". Obiectele abstracte și conceptele

au obiectivitate însă nu realitate. Frege nu este astfel realistul platonic cu care ne-a obişnuit o parte a exegezei, fiindcă el nu hipostaziază entităţile pînă la a le conferi realitate, ceea ce ar fi însemnat — după cum reiese desluşit din explicaţiile date de el — a le conferi atributul existenţei autonome în spaţiu şi timp. Despre realitatea lumii materiale, la care sensibilitatea are acces, Frege se exprimă în termenii realismului sănătos, materialist al omului înzestrat cu bun-simţ, fără a recurge la argumentele scepticului sau la problematica despărţire kantiană între aparenţa fenomenală (lucrul pentru noi) şi lucrul în sine. Numerele însă, şi la fel conceptele, neavînd realitate au autonomie logică (dacă este vorba de primele) sau n-o au (conceptele), dar obiectivitate au pe deplin.

FUNDAMENTELE ARITMETICII

CUPRINS[2]

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori sau sînt analitice?

§ 27. Numărul nu este, cum pretinde Schloemilch, reprezentarea poziției unui obiect în cadrul unui șir.

Numărul ca mulțime

§ 28. Thomae despre conferirea denumirilor.

III. Opinii privitoare la Unitate și Unu

Exprimă numeralul „unu" o proprietate a obiectelor?

§ 29. Ambiguitatea expresiilor „μονάς" și „unitate". Definiția dată de E. Schröder: unitatea ca obiect al numărării este în aparență inadecvată. Adjectivul „un" nu cuprinde o determinare mai precisă, nu poate servi ca predicat.

§ 30. Tentativele lui Leibniz și Baumann de definire a unității par să estompeze total conceptul unității.

§ 31. Criteriile indivizibilității și delimitării la Baumann. Nu orice obiect ne conduce la ideea unității (Locke).

§ 32. Și totuși, limba indică o conexiune cu indivizibilitatea și delimitarea, dar se produce o deplasare de sens.

§ 33. Indivizibilitatea (G. Kopp) nu poate fi ridicată la rangul de criteriu al unității.

Sînt oare identice unitățile?

§ 34. Identitatea ca temei al denumirii „unitate". E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Prin abstra-

Spre a obţine conceptul de număr trebuie stabilit sensul unei identităţi numerice

Numere infinite

V. **Încheiere**

Alte numere

FUNDAMENTELE ARITMETICII

INTRODUCERE

La întrebarea ce este numărul unu, sau ce înseamnă semnul 1, se răspunde de obicei: „un lucru“[3]. Iar dacă vom atrage atenția asupra faptului că propoziția

„numărul unu este un lucru“

nu constituie o definiție, deoarece într-o parte ea conține articolul hotărît, pe cînd în cealaltă parte articolul nehotărît, că ea nu face decît să încadreze numărul unu printre lucruri, fără a specifica însă despre care lucru este vorba, ni se va răspunde, probabil, că ne putem alege oricare lucru vrem spre a-l numi unu. Dar dacă fiecare ar avea dreptul să înțeleagă sub această denumire orice dorește, atunci una și aceeași propoziție despre unu ar fi înțeleasă în mod diferit de către oameni diferiți; aceste propoziții nu ar avea vreun conținut comun. Poate că unii vor refuza să răspundă la această întrebare, arătînd că semnificația literei *a* în cadrul aritmeticii nu poate fi nici ea precizată, și că, în cazul cînd am spune „*a* înseamnă un număr“, afirmația noastră ar putea suscita aceeași obiecție ca definiția: „unu este un număr“. Or, în cazul lui *a*, refuzul de a răspunde la întrebare este pe deplin îndreptățit; într-adevăr, *a* nu semnifică un număr determinat, specificat ca atare, ci servește pentru a exprima universalitatea propozițiilor. Dacă în $a+a—a=a$ punem în locul lui *a* un număr arbitrar, dar același peste tot, obținem întotdeauna o egalitate adevărată. Acesta este sensul în care este folosită litera *a*. În cazul lui unu însă, lucrurile stau cu totul altfel. Oare în egalitatea $1+1=2$ putem înlocui pe 1, în ambele locuri unde apare, prin unul și același obiect, de pildă Luna? Dimpotrivă, s-ar părea că pe primul 1 trebuie să-l înlocuim prin ceva diferit de ceea ce înlocuiește pe al doilea 1. Cum se face că aici trebuie procedat într-un mod care în celălalt

caz ar fi eronat? Totodată, aritmetica nu se poate mulţumi numai cu litera *a*, ci este nevoită să utilizeze şi alte litere (*b*, *c* etc.), pentru a exprima în formă generală relaţii între numere diferite[4]. S-ar putea presupune deci că nici semnul 1 nu ar fi suficient, dacă, în mod similar, el ar fi destinat să confere generalitate propoziţiilor. Dar numărul unu apare ca un obiect determinat ale cărui proprietăţi pot fi specificate; de exemplu, unu are proprietatea de a rămîne neschimbat în cazul înmulţirii cu el însuşi. În acest sens, dimpotrivă, *a* nu are proprietăţi care pot fi specificate, întrucît ceea ce se enunţă despre *a* este o proprietate comună a tuturor numerelor, în timp ce $1^1=1$ nu enunţă nimic despre Lună, despre Soare, despre Sahara sau despre vîrful Teneriffe; într-adevăr, ce sens ar putea avea un atare enunţ?[5]

La întrebări ca acestea nici matematicienii, în majoritatea lor, nu sînt pregătiţi să dea un răspuns satisfăcător. Nu este însă penibil ca ştiinţa să persiste în neclaritate, în privinţa obiectului ei primordial, obiect atît de simplu în aparenţă? Cu atît mai puţin se va putea spune ce este numărul în genere. Atunci însă cînd un concept fundamental al unei ştiinţe importante suscită dificultăţi, cercetarea mai amănunţită a acestui concept, în scopul depăşirii dificultăţilor, constituie o sarcină imperioasă, cu atît mai mult cu cît ar fi greu să se elucideze pe deplin natura numerelor negative, raţionale sau complexe, atîta timp cît înţelegerea fundaţiei pe care se reazemă întregul edificiu al aritmeticii rămîne nesatisfăcătoare.

Mulţi vor considera, desigur, că aceasta ar fi o osteneală de prisos. După părerea lor, conceptul în cauză a fost tratat suficient în manualele elementare şi epuizat astfel o dată pentru totdeauna. Cine ar crede că mai are ceva de învăţat într-o chestiune atît de simplă? Conceptul de număr întreg pozitiv este considerat a fi într-atît de neproblematic, încît se crede că el ar putea fi prezentat ştiinţific şi exhaustiv pînă şi copiilor şi că oricine, fără a mai trebui să reflecteze şi să cunoască ceea ce au gîndit alţii, ştie tot ce se poate şti despre acest concept.

Prin urmare, nu este îndeplinită deloc prima condiție preliminară a învățării: a ști că nu știm[6]. Rezultatul este că ne mulțumim în continuare cu o concepție rudimentară, deși încă Herbart* profesase o doctrină mai adecvată[7]. Este tulburător și demoralizant faptul că rezultatele dobîndite anterior riscă astfel mereu să se piardă iarăși, că atîta trudă pare să fi fost zadarnică, și aceasta numai pentru că autosuficiența ne face să nu considerăm necesar a ne însuși roadele cunoașterii. Îmi dau bine seama că și lucrarea de față este expusă aceluiași pericol. Împotriva mea se ridică acea concepție rudimentară după care calculul ar fi o gîndire agregativă, mecanică**. Personal, mă îndoiesc că în genere există o asemenea gîndire[8]. Mai curînd am putea admite o facultate a reprezentării de natură agregativă, însă ea nu prezintă vreo însemnătate pentru calcul. În esență, gîndirea este peste tot aceeași: legile gîndirii nu se diferențiază după un obiect sau altul. Deosebirile constau doar în gradul mai mare sau mai mic de puritate și de independență față de factorii de ordin psihologic și față de mijloacele auxiliare exterioare ale gîndirii (limbajul, notațiile numerelor etc.), precum și în finețea mai mare sau mai mică a construcției conceptelor; însă tocmai în această privință matematica nu poate fi depășită de nici una dintre științe, nici măcar de către filosofie.

Din scrierea de față se va putea vedea că pînă și un raționament în aparență atît de specific matematic cum este cel de la n la $n+1$, se întemeiază pe legile generale ale logicii[9] și că nu avem nevoie să apelăm la legi speciale ale unei gîndirii agregative. Firește, noi putem folosi mecanic simbolurile numerelor, tot așa cum putem vorbi papagalicește; însă cu greu s-ar putea numi aceasta gîndire. Dar, ce-i drept, este posibil ca limbajul simbolic

---

* *Sämmtliche Werke*, ed. Hartenstein, vol. X, Partea I, *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, § 252, Obs. 2: „Doi nu înseamnă două lucruri, ci dublarea“ etc.

** K. FISCHER, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, ed. 2, § 94.

al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gîndirii reale, încît ulterior, ca să spunem așa, să gîndească el pentru noi. Aceasta însă nu dovedește că numerele s-ar fi format într-un anume mod mecanic, așa cum, de pildă, grămezile de nisip se formează din grăunțe de cuarț[10]. După părerea mea, este în interesul matematicienilor ca să combatem o atare concepție care duce la discreditarea unui obiect principal al științei lor și discreditează astfel însăși această știință. Afirmații de același gen le putem întîlni însă pînă și în lucrările matematicienilor. În opoziție cu aceste concepții, va trebui să admitem, dimpotrivă, că conceptul de număr are o structură mai complicată decît aceea a majorității conceptelor din alte științe, deși numărul rămîne unul din cele mai simple concepte aritmetice[11].

Pentru a spulbera deci iluzia că numerele întregi pozitive nu suscită de fapt nici o dificultate și că există un consens unanim asupra lor, am considerat oportun să discut unele păreri ale filosofilor și matematicienilor, în legătură cu problemele ridicate aici. Se va vedea cît de puțin concordă între ele aceste păreri; vom avea prilejul să întîlnim chiar și concepții diametral opuse. De exemplu, în timp ce unii afirmă că „unitățile sînt identice între ele", alții le consideră diferite, fiecare aducînd în sprijinul poziției sale argumente care nu pot fi respinse fără o examinare atentă. Ceea ce mi-am propus în cele de față este să trezesc dorința unei analize mai minuțioase. Totodată, examinarea preliminară a părerilor exprimate de alții va curăți terenul pentru propria mea concepție, astfel ca oricine să se convingă din capul locului că celelalte căi nu duc la țintă și că părerea mea nu este una printre multe altele, egal îndreptățite; sper astfel să rezolv definitiv problema, cel puțin în aspectele ei esențiale.

Desigur, expunerea mea va lua astfel o turnură mai filosofică decît ar putea admite numeroși matematicieni; însă analiza temeinică a conceptului de număr comportă

inevitabil un anumit element filosofic. Problema aparţine atît matematicii cît şi filosofiei.

Dacă in pofida demersurilor întreprinse de ambele părţi, conlucrarea celor două ştiinţe este departe de a înflori, aşa cum am dori şi cum ar fi şi posibil, această stare de lucruri, după părerea mea, se datoreşte preponderenţei în filosofie a metodelor psihologice de analiză, metode care au pătruns pînă şi în domeniul logicii. Această orientare nu are nici un punct de contact cu matematica, fapt ce explică lesne aversiunea multor matematicieni faţă de considerentele filosofice. Astfel, cînd Stricker* spune că reprezentările noastre asupra numerelor sînt fenomene motorii, dependente de senzaţiile musculare, matematicianul nu mai este în măsură a recunoaşte aici numerele sale şi nu are ce să facă cu o propoziţie de acest gen. O aritmetică fundată pe senzaţii musculare ar fi, de bună seamă, senzaţională, însă ar rămîne la fel de confuză ca şi fundaţiile pe care se reazimă. Nu, aritmetica nu are nici o tangenţă cu senzaţiile, precum nici cu imaginile interioare plăsmuite din urmele impresiilor senzoriale anterioare. Inconstanţa şi vagul în care plutesc toate aceste configuraţii contrastează puternic cu precizia şi soliditatea conceptelor şi obiectelor matematicii. Cercetarea reprezentărilor şi a metamorfozelor suferite de acestea se poate dovedi, fireşte, utilă; psihologia nu trebuie să-şi închipuie însă că ar putea aduce vreo contribuţie la fundamentarea aritmeticii[12]. Pentru matematician ca atare, aceste imagini mentale, geneza şi transformarea lor, nu prezintă nici o importanţă. Stricker însuşi afirmă că el nu asociază cuvîntului „o sută“ altceva decît reprezentarea semnului 100. Alţii şi-ar putea reprezenta litera C sau orice altceva. Oare de aici nu urmează că, în cazul nostru, aceste imagini mentale sînt absolut irelevante pentru esenţa chestiunii? Nu urmează că ele sînt absolut accesorii, asemenea tablei negre şi a unei bucăţi de cretă care, nici ele, nu pot fi numite reprezentări ale număru-

* *Studien über Association der Vorstellungen,* Viena, 1883.

lui o sută? Așadar, nu ne este îngăduit să credem că esența chestiunii ar consta în asemenea reprezentări! Să nu confundăm descrierea modului de apariție a unei reprezentări cu o definiție, să nu confundăm determinarea condițiilor psihosomatice în care devenim conștienți de o propoziție cu demonstrația acesteia și să nu confundăm adevărul unei propoziții cu faptul de a fi gîndită. Trebuie reamintit, se pare, că o propoziție nu încetează a fi adevărată în clipa cînd eu încetez să o mai gîndesc, tot așa cum nici Soarele nu dispare în clipa cînd închid ochii. În caz contrar, s-ar putea ajunge pînă acolo încît în demonstrarea teoremei lui Pitagora să trebuiască să menționăm conținutul în fosfor al creierului nostru, iar un astronom să șovăie să extindă concluziile sale asupra trecutului îndepărtat, de teamă ca să nu i se obiecteze: „Ai socotit aici că $2 \cdot 2 = 4$; însă ideea de număr are și ea o evoluție, o istorie! E îndoielnic ca ea să fi ajuns încă de pe atunci într-un stadiu atît de avansat. De unde știi că în acel trecut îndepărtat propoziția noastră exista deja? Oare ființele de atunci nu ar fi putut avea propoziția $2 \cdot 2 = 5$, din care apoi, prin selecție naturală în cursul luptei pentru existență, să fi luat naștere propoziția $2 \cdot 2 = 4$? Și, — cine știe! — poate că însăși această din urmă propoziție este cumva sortită să se transforme, în același mod, în $2 \cdot 2 = 3$". — *Est modus in rebus, sunt certi denique fines!* Abordarea istorică chemată să dea la iveală devenirea lucrului, pentru a cunoaște astfel însăși esența acestuia, are, desigur, justificarea sa; ea își are însă limitele sale. Dacă în fluxul continuu al tuturor lucrurilor nu am mai reține nimic stabil, etern, universul ar înceta să mai fie recognoscibil și totul s-ar topi într-un vîrtej haotic. După cum s-ar părea, unii își închipuie că noțiunile apar în sufletul individual așa cum apar frunzele pe copaci și consideră că am putea cunoaște esența conceptelor cercetînd apariția acestora și dîndu-le o explicație psihologică, pornind de la natura cugetului uman. Această concepție transformă însă orice lucru în ceva subiectiv și, dusă pînă la capăt, e la antipodul adevărului.

Ceea ce se numește istorie a conceptelor este de fapt istoria cunoașterii de către noi, fie a conceptelor, fie a semnificațiilor cuvintelor. Așa cum se întîmplă în mod frecvent, abia un imens efort intelectual care poate continua secole întregi duce la cunoașterea unui concept în puritatea sa, curățat de suprapunerile străine care îl ascund ochilor minții. Ce să spunem atunci despre acei care, în loc de a duce mai departe această operă în domeniile unde ea nu pare a se fi încheiat, o desconsideră și se refugiază în camera copiilor sau în cele mai străvechi perioade ale evoluției omenirii, pentru ca să descopere acolo, ca J. St. Mill, aritmetica turtelor dulci sau a pietricelelor! Nu ne mai rămîne decît să atribuim aromelor culinare o semnificație specială pentru conceptul de număr. O asemenea procedură se situează la antipodul celei raționale și este, în orice caz, cum nu se poate mai nematematică. Nu e de mirare că matematicienii nu vor să audă nimic despre ea! În loc de a afla o deosebită puritate a conceptului pe măsură ce credem a ne apropia de izvoarele sale, toate lucrurile apar ca printr-o ceață, spălăcite și amorfe. Lucrurile se prezintă ca și cum, pentru a cunoaște America, cineva ar vrea să se pună iarăși în situația lui Columb, în momentul cînd acesta a zărit prima lucire șovăielnică a presupusei sale Indii. Firește, această comparație nu demonstrează nimic; sper însă că ea înfățișează cît se poate de limpede punctul meu de vedere. În numeroase cazuri, se poate întîmpla, desigur, ca istoria descoperirilor anterioare să-și dovedească utilitatea ca demers preliminar în vederea cercetărilor ulterioare; dar nu este permis ca ea să uzurpe locul acestora[13].

În ceea ce îi privește pe matematicieni, combaterea unor atari concepții ar fi fost într-adevăr superfluă; întrucît însă în încercarea de a soluționa controversatele probleme discutate i-am avut în vedere și pe filosofi, m-am văzut silit să fac mici incursiuni în domeniul psihologiei, fie și numai pentru a respinge intruziunea ei în domeniul matematicii.

Dealtfel, formulări psihologice întîlnim pînă și în manualele de matematică. Atunci cind autorul se simte obligat să dea o definiție fără a fi însă în stare să-și realizeze intenția, el încearcă cel puțin să descrie modul în care se ajunge la obiectul sau conceptul respectiv. Situația poate fi identificată cu ușurință: în cursul expunerii ulterioare autorul nu se mai întoarce niciodată la asemenea explicații. Demersurile introductive, în scopuri didactice, sînt pe deplin justificate; trebuie însă să le distingem întotdeauna în mod clar de o definiție. Un exemplu admirabil al modului în care pînă și matematicienii pot confunda temeiurile demonstrației cu condițiile psihice sau fizice ale producerii demonstrației ni-l oferă E. Schröder*, atunci cînd, sub titlul „Axiomă specială", scrie următoarele: „Principiul pe care l-am avut în minte s-ar putea intitula Axioma inerenței semnelor. Acest principiu ne dă certitudinea că de-a lungul tuturor expunerilor și raționamentelor noastre, semnele rămîn întipărite atît în memoria noastră, cît și — cu atît mai mult — pe hîrtie" ș.a.m.d.[14]

Dacă, pe de o parte, matematica trebuie să refuze orice asistență din partea psihologiei, pe de altă parte ea nu poate contesta strînsa ei conexiune cu logica. Eu merg chiar pînă la a fi de acord cu cei care susțin imposibilitatea unei delimitări nete între matematică și logică. În orice caz, se va admite că orice investigație asupra valabilității unei demonstrații sau a justificării unei definiții este, în mod inevitabil, o investigație de natură logică. Dar asemenea chestiuni nu pot fi eliminate din matematică, deoarece numai dîndu-le un răspuns putem obține certitudinea necesară.

În această direcție, de asemenea, eu merg desigur ceva mai departe decît se obișnuiește. Majoritatea matematicienilor se mulțumesc, atunci cînd sînt întreprinse cercetări de acest gen, să răspundă cerințelor imediate. Cînd o definiție se dovedește operantă în cadrul demonstra-

---

* *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.*

ţiilor, cînd nu ne ciocnim nicăieri de contradicţii, cînd descoperim conexiuni între lucruri aparent fără legătură între ele şi ajungem astfel la o ordonare şi o regularitate superioară, obişnuim a considera că definiţia respectivă a fost asigurată într-un mod satisfăcător şi ne mai interesăm prea puţin de justificarea ei logică. Acest procedeu are în orice caz avantajul că nu ne abate prea mult de la ţelul urmărit. Sînt şi eu gata să admit că definiţiile trebuie apreciate după eficienţa lor, după posibilităţile pe care le oferă în vederea efectuării demonstraţiilor. Trebuie însă să ţinem seama de faptul că rigoarea demonstraţiei rămîne iluzorie, chiar dacă lanţul deducţiilor nu prezintă nici o lacună, atîta timp cît definiţiile nu-şi găsesc justificarea decît în mod tardiv, şi anume prin faptul că nu am ajuns la o contradicţie. Procedînd astfel, unica certitudine pe care o putem dobîndi este esenţialmente empirică şi efectiv trebuie să acceptăm eventualitatea descoperirii ulterioare a unei contradicţii care să ruineze întregul edificiu[15]. Din acest motiv, m-am crezut obligat să revin mai mult decît consideră a fi necesar majoritatea matematicienilor asupra fundamentelor logice generale.

În cercetarea de faţă am adoptat trei principii fundamentale:

trebuie să distingem întotdeauna în mod riguros psihologicul de logic, subiectivul de obiectiv[16];

semnificaţia cuvintelor nu trebuie căutată în izolarea lor, ci numai în contextul propoziţiei[17];

trebuie avută în vedere distincţia dintre concept şi obiect[18].

Conform primului principiu, am folosit întotdeauna cuvîntul „reprezentare" [Vorstellung] în sens psihologic, făcînd o distincţie între reprezentări, pe de o parte, concepte şi obiecte, pe de altă parte. Atunci cînd nu se respectă al doilea principiu, ne vedem siliţi să acceptăm în calitate de semnificaţii ale cuvintelor imagini mentale sau acte ale psihicului individual, încălcînd astfel primul

principiu. În ceea ce privește al treilea punct, ar fi o iluzie să ne închipuim că un concept poate fi transformat în obiect, fără a-l modifica. De aici urmează că o anume teorie formală larg răspîndită asupra fracțiilor, numerelor negative etc. este inconsistentă. În scrierea de față nu pot decît să indic în linii mari o soluție mai bună. În cazul numerelor de acest tip, ca și în cazul numerelor întregi pozitive, problema revine la a stabili sensul unei identități.

Cred că rezultatele la care am ajuns vor obține, cel puțin în linii mari, adeziunea acelor matematicieni care își dau osteneala să examineze argumentele mele. Mi se pare că ele plutesc deja în aer, și nu este exclus ca fiecare dintre ele in parte, sau cel puțin rezultate apropiate, să fi fost deja exprimate; cu toate acestea, așa cum sînt prezentate aici în conexiunea lor reciprocă, ele pot constitui încă o noutate. Am fost adesea surprins să constat că expuneri care într-o anumită privință se apropiau foarte mult de propria mea concepție, se îndepărtau totuși în mod substanțial de ea, în alte privințe.

Felul cum vor fi primite aceste rezultate de către filosofi va diferi de la caz la caz, în funcție de punctul de vedere al fiecăruia; cea mai rea primire le-o vor face, desigur, empiriștii care nu recunosc ca procedeu originar de raționament decît inducția și pînă și pe aceasta o consideră nu ca un raționament propriu-zis, ci ca o deprindere. Poate că un filosof sau altul va folosi acest prilej pentru a supune propria sa teorie a cunoașterii unei noi verificări. Celor care ar înclina să critice definițiile mele ca artificiale, le-aș sugera că în cazul de față problema nu este dacă aceste definiții sînt naturale, ci dacă ele ating miezul chestiunii și sînt logic inatacabile.

Îmi permit să sper că și filosofii, dacă vor examina fără prejudecăți scrierea mea, vor găsi unele lucruri folositoare.

§ 1. După ce s-a îndepărtat un timp de la rigoarea euclidiană, matematica se reîntoarce în prezent la ea și se străduiește chiar să o depășească. În aritmetică, fie și numai datorită originii indiene a mai multor metode și concepte ale sale, se încetățenise un mod de gîndire mai puțin riguros decît în geometrie, care a fost cu precădere o creație a grecilor. Elaborarea analizei superioare nu a făcut decît să stimuleze această tendință; într-adevăr, tratarea riguroasă a acestei teorii s-a ciocnit de dificultăți considerabile, aproape de neînvins, dificultăți a căror depășire nu făgăduia totuși să răsplătească eforturile depuse în acest scop. Evoluția ulterioară a arătat însă din ce în ce mai limpede că matematica nu se poate mulțumi cu simpla convingere morală, susținută de numeroase aplicații încununate de succes. Pentru numeroase aserțiuni care înainte erau admise, ca de la sine înțelese, se pretinde astăzi o demonstrație. În multe cazuri, limitele de valabilitate ale unei propoziții au ajuns să fie stabilite astfel pentru prima oară. S-a arătat că noțiunile de funcție, continuitate, limită, infinit necesită o definiție mai riguroasă. Numărul negativ și numărul irațional, care fuseseră admise de mai multă vreme în cadrul științei, au fost supuse unei examinări mai exigente, chemată să stabilească dreptul lor de cetățenie.

Pretutindeni ne întîmpină astfel aspirația de a da demonstrații riguroase, de a delimita precis granițele validității și, spre a se putea ajunge la aceasta — tendința de a defini riguros conceptele.

§ 2. Urmînd acest drum, va trebui să ajungem la conceptul de număr[19] și la cele mai simple propoziții asupra numerelor întregi pozitive care constituie fundamentul întregii aritmetici. Negreșit, formule numerice cum sînt $5+7=12$ și legi ca aceea a asociativității adunării își

găsesc atîtea confirmări în cadrul numeroaselor lor aplicaţii cotidiene, încît punerea lor la îndoială, prin reclamarea unei demonstraţii, poate părea de-a dreptul ridicolă. Dar, prin însăşi natura ei, în locul unei verificări inductive matematica preferă, ori de cîte ori aceasta este posibil, o demonstraţie. Euclid demonstrează numeroase lucruri pe care oricine i le-ar fi admis oricum. Dar, atunci cînd matematicienii nu s-au mai declarat satisfăcuţi cu gradul euclidian de rigoare, ei au ajuns la cercetările legate de axioma paralelelor.

Astfel, încă de pe acum orientarea în direcţia unei rigori maxime a depăşit în numeroase privinţe cerinţele iniţiale, accentuîndu-se mereu şi extinzîndu-se în diverse domenii.

Demonstraţia, trebuie spus, nu are numai scopul de a pune adevărul unei propoziţii la adăpost de orice îndoială; ea ne face cunoscută, de asemenea, dependenţa reciprocă a adevărurilor. După ce încercările nereuşite de a-l clinti ne-au convins că un bloc de piatră este de neclintit, mai rămîne să ne întrebăm ce anume îl susţine atît de solid. Cu cît ducem mai departe aceste cercetări, cu atît mai puţine ajung adevărurile iniţiale la care reducem totul; această simplificare, luată în sine, este un scop demn de toată atenţia noastră[20]. Nu este exclus ca să se confirme şi o altă speranţă, anume aceea ca, pornind de la elucidarea activităţii spontane a oamenilor in cazurile cele mai simple şi desprinzînd de aici elementul universal valid, vom ajunge la cunoaşterea unor procedee generale de elaborare a conceptelor şi de întemeiere a propoziţiilor, procedee aplicabile chiar în cazurile mai complicate[21].

§ 3. Mobiluri de ordin filosofic m-au condus de asemenea la cercetări de acest gen. Întrebările privind natura apriorică sau aposteriorică, sintetică sau analitică a adevărurilor aritmetice îşi aşteaptă aici răspunsul lor. Într-adevăr, deşi înseşi aceste concepte aparţin filosofiei[22], soluţia, după părerea mea, nu poate fi obţinută fără a chema în ajutor matematica. Fireşte, aceasta depinde de sensul pe care îl dăm problemelor în cauză.

Nu odată se întîmplă ca descoperirea conţinutului unei propoziţii să preceadă demonstraţia riguroasă a acesteia din urmă, obţinută pe alte căi, mai anevoioase; însăşi această demonstraţie ne permite adesea să cunoaştem mai precis condiţiile valabilităţii propoziţiei. În genere, deci, problema modului în care ajungem la conţinutul unei judecăţi trebuie separată de problema modului în care justificăm aserţiunea respectivă.

După părerea mea, distincţiile între *a priori* şi *a posteriori*, sintetic şi analitic, nu privesc conţinutul judecăţii, ci justificarea emiterii ei*. Acolo unde justificarea lipseşte, dispare şi posibilitatea efectuării acestei clasificări. O eroare apriorică este aşadar un lucru la fel de absurd ca, de pildă, un concept albastru. Cînd spunem că o propoziţie este aposteriorică sau apriorică în sensul pe care îl am eu în vedere, noi nu judecăm asupra condiţiilor psihologice, fiziologice şi fizice care au permis constituirea în conştiinţă a conţinutului propoziţiei; de asemenea, nu ne pronunţăm asupra modului în care altcineva a ajuns s-o considere, poate în mod eronat, adevărată; ne pronunţăm asupra temeiului cel mai adînc care justifică acceptarea adevărului acestei propoziţii.

Problema este astfel scoasă din domeniul psihologiei şi plasată în domeniul matematicii, atunci cînd este vorba de un adevăr matematic. Acum, ceea ce se cere este de a descoperi demonstraţia, reducînd-o, pas cu pas, pînă la adevărurile primitive. Dacă, odată angajaţi pe acest drum, ajungem numai la legile logice generale şi la definiţii, adevărul are un caracter analitic; se presupune, totodată, că au fost luate în consideraţie şi acele propoziţii de care depinde admisibilitatea fiecărei definiţii[23]. Dacă însă efectuarea demonstraţiei este imposibilă atîta timp cît nu facem apel la adevăruri care nu sînt de natură general-logică, ci aparţin unui anumit domeniu special al ştiinţei,

* Prin aceasta nu urmăresc, desigur, să atribui un nou sens acestor termeni, ci numai să stabilesc ceea ce au avut în vedere autori anteriori şi în special Kant.

propoziția este sintetică. Pentru ca un adevăr să fie aposterioric, este necesar ca demonstrația lui să facă apel la fapte; cu alte cuvinte, să folosească adevăruri indemonstrabile şi care nu au caracter universal, ele cuprinzînd enunțuri despre obiecte determinate în mod special[24]. Dacă, dimpotrivă, demonstrația poate fi întreprinsă exclusiv pe baza unor legi universale, care nu admit şi nici nu pretind o demonstrație, atunci adevărul este aprioric*.

§ 4. Pornind de la aceste probleme filosofice, ajungem la aceleaşi cerințe care, independent de aceasta, se ridicaseră în matematici — cerința de a demonstra cu rigoare maximă, ori de cîte ori este posibil, propozițiile fundamentale ale aritmeticii. Într-adevăr, numai eliminarea cît se poate de scrupuloasă a oricărei lacune din lanțul raționamentelor ne permite să afirmăm cu deplină certitudine care sînt adevărurile originare pe care se sprijină demonstrația; or, problemelor de mai sus le vom putea da un răspuns numai cu condiția ca să cunoaştem aceste adevăruri.

Dacă încercăm acum să dăm curs acestei cerințe, ajungem imediat la propoziții a căror demonstrare rămîne imposibilă atîta timp cît nu reuşim să reducem conceptele care figurează în cadrul lor la alte concepte mai simple, sau la un element de mai mare generalitate[25]. În cazul de față este vorba în primul rînd despre număr, care trebuie să fie sau definit sau recunoscut ca fiind imposibil de definit. Cartea de față îşi propune elucidarea acestei

---

* Admițînd în genere existența unor adevăruri universale, trebuie să admitem totodată existența unor legi originare; într-adevăr, numai din fapte individuale nu decurge nimic, decît în temeiul unei legi. Însăşi inducția se sprijină pe propoziția generală potrivit căreia demersul inductiv poate întemeia adevărul unei legi, sau cel puțin probabilitatea aceleia din urmă. Pentru cel ce contestă aceasta, inducția nu este decît un fenomen psihologic, un procedeu prin care oamenii ajung să creadă în adevărul unei propoziții, fără ca ceea ce ei cred să aibă cea mai mică justificare.

chestiuni*. Răspunsul dat va determina și soluția problemei privind natura legilor aritmetice.

Înainte de a aborda înseși aceste chestiuni, îmi propun să fac cîteva observații preliminare privitor la ceea ce ar putea constitui cheia unui răspuns. Într-adevăr, dacă abordînd problema prin prisma altor concepții vom afla temeiuri pentru a atesta caracterul analitic al propozițiilor fundamentale ale aritmeticii, atunci aceste temeiuri vor pleda și pentru demonstrabilitatea acelorași propoziții, precum și pentru posibilitatea definirii conceptului de număr. O înrîurire în sens opus o vor avea temeiurile caracterului aposterioric al acestor adevăruri. De aceea, este indicat să întreprindem un examen preliminar al acestor chestiuni controversate.

I. Opiniile unor autori asupra naturii propozițiilor aritmetice

Sînt oare demonstrabile formulele numerice?

§ 5. Formulele numerice care se referă la numere determinate, cum este formula $2+3=5$, trebuie distinse de legile generale valabile pentru toate numerele.

Aceste formule sînt considerate de către unii filosofi** ca indemonstrabile și nemijlocit evidente, asemenea unor axiome[26]. Kant*** le declară indemonstrabile și sintetice, ezitînd însă a le denumi axiome, dat fiind faptul că ele nu sînt generale și că sînt în număr infinit[27]. Han-

---

* Ca atare, în cele ce urmează, atunci cînd nu se va specifica nimic altceva, va fi vorba numai despre numerele pozitive întregi, care răspund la întrebarea „cîți", „cîte".

** Hobbes, Locke, Newton. Cf. BAUMANN, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, pp. 241 și 242, 365 și urm., 475.

*** *Kritik der reinen Vernunft*, herausgeg. v. Hartenstein, III, p. 157.

kel[28*] afirmă pe drept cuvînt că admiterea unei infinități de adevăruri originare indemonstrabile este paradoxală și inadecvată. În fapt, ea contrazice una din exigențele rațiunii, și anume evidența fundamentelor prime. Să fie oare nemijlocit evident că

$$135\,664 + 37\,863 = 173\,527\,?$$

Nicidecum! Și tocmai aceasta îl face pe Kant să susțină natura sintetică a acestor propoziții. Dar același fapt pledează cu atît mai mult împotriva indemonstrabilității acelorași propoziții; căci cum altfel decît prin intermediul unei demonstrații le-am putea sesiza, de vreme ce ele nu prezintă o evidență nemijlocită? Kant nu ezită să invoce intuiția degetelor sau a punctelor[29], riscînd astfel ca, împotriva intenției sale, să prezinte ca empirice aceste propoziții; căci, într-adevăr, intuiția a 37 863 de degete nu este în nici un caz o intuiție pură. Mai mult, termenul „intuiție“ nu pare a fi adecvat, dat fiind că și 10 degete, prin dispunerea lor într-un mod sau altul, pot suscita cele mai felurite intuiții. Dar, în genere, avem noi oare o intuiție a 135 664 de degete sau puncte? Dacă am avea această intuiție, împreună cu intuiția a 37 863 de degete și alta a 173 527 de degete, valabilitatea formulei noastre, dacă ea ar fi indemonstrabilă, ar fi imediat evidentă, cel puțin în cazul degetelor; însă nu acesta este cazul.

Kant a avut în vedere, desigur, numai numere mici. Așadar, formulele pentru numere mari ar fi demonstrabile, în timp ce formulele pentru numere mici sînt nemijlocit evidente prin intuiție. Însă trasarea unei distincții principiale între numerele mici și numerele mari este contestabilă, cu atît mai mult cu cît între ele cu greu s-ar putea trage o linie de demarcație rigidă. Dacă formulele numerice ar fi demonstrabile începînd de la 10, să spunem, ne-am putea întreba pe drept cuvînt: de ce nu începînd de la 5, de la 2, de la 1?

---

* *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Funktionen*, p. 55.

§ 6. Alţi filosofi şi matematicieni au susţinut, pe de altă parte, că formulele numerice sînt demonstrabile. Leibniz* spune:

„Că 2 şi cu 2 fac 4 nu este un adevăr imediat; să admitem că *patru* înseamnă trei şi cu unu. Demonstraţia poate fi făcută, și anume astfel:

Definiţii: 1) *Doi* este unu şi cu unu.
2) *Trei* este Doi şi cu unu.
3) *Patru* este Trei şi cu unu.

Axiomă: înlocuind egalii prin egali, egalitatea persistă.

Demonstraţie: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
Def. 1. Def.2. Def.3.

Deci, conform axiomei: $2 + 2 = 4$."

La prima vedere, această demonstraţie pare a fi integral construită din definiţii şi din susmenţionata axiomă. La rîndul ei, axioma ar putea fi transformată într-o definiţie, aşa cum procedează însuşi Leibniz într-un alt loc**. S-ar părea că despre 1, 2, 3, 4 nu avem nevoie să știm decît ceea ce este cuprins în definiţii. La o examinare mai atentă descoperim însă o lacună, camuflată de omiterea parantezelor. Și anume, pentru a fi mai riguroşi, trebuia să se scrie:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Lipsește aici propoziţia

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

propoziţie care constituie un caz particular al lui

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

* *Nouveaux Essais*, IV, § 10, ed. Erdmann, p. 363.
** *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, ed. Erdmann, p. 94.

Dacă asumăm această lege, se constată cu ușurință că orice formulă a adunării poate fi demonstrată în mod similar. Așadar, fiecare număr trebuie definit pe baza celui precedent. În fapt, nu văd cum un număr ca 437 986 ar putea să ne fie dat într-un mod mai adecvat decît acela propus de Leibniz. Chiar fără a avea vreo reprezentare preliminară despre acest număr, noi reușim astfel a-l lua în stăpînire. Mulțimea infinită a numerelor este redusă, prin intermediul acestor definiții, la numărul unu și mărirea cu unu; orice formulă din infinitatea formulelor numerice se poate demonstra pe baza cîtorva propoziții generale.

Aceasta este și opinia lui H. Grassmann[30] și a lui H. Hankel. Primul încearcă să obțină legea

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

pe baza unei definiții, după cum urmează*:

„Dacă a și b sînt termeni arbitrari ai șirului fundamental, vom înțelege prin suma $a+b$ acel termen al șirului fundamental care satisface formula

$$a + (b + e) = a + b + e."$$

Aici, e trebuie să însemne unitatea pozitivă. Împotriva acestei interpretări putem aduce două observații. În primul rînd, suma este definită prin ea însăși. În cazul cînd nu știm încă ce înseamnă $a+b$, nu înțelegem nici expresia $a+(b+e)$. Această obiecție ar putea fi însă evitată, eventual, dacă — intrînd desigur în contradicție cu formularea de mai sus — nu suma, ci adunarea ar constitui obiectul definiției. Dar, și în acest caz s-ar putea obiecta că $a+b$ constituie o notație lipsită de conținut atunci cînd nu există nici un termen al șirului fundamental, sau cînd există mai mulți termeni ai acestuia care ar satisface condiția prescrisă. Grassmann presupune pur și simplu, fără demonstrație, că aceasta nu se în-

* *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten.* Partea I. *Arithmetik*, Stettin, 1860, p. 4.

tîmplă niciodată; dar astfel, rigoarea procedeului său rămîne o simplă aparență.

§ 7. S-ar putea crede că formulele numerice sînt sintetice sau analitice, aposteriorice sau apriorice, după cum sînt și legile generale de care atîrnă demonstrația lor. John Stuart Mill[31] este însă de părerea opusă. Ce-i drept, la început el pare să intenționeze a întemeia știința — ca și Leibniz[32] — pe definiții*, deoarece definește numerele individuale în același mod ca și Leibniz; însă prejudecata sa că întreaga cunoaștere este empirică denaturează imediat această idee justă. Într-adevăr, el ne aduce la cunoștință** că definițiile în cauză nu ar fi definiții în sens logic, că ele nu se mărginesc să stabilească semnificația unei expresii, ci afirmă totodată un fapt observat. Dar ce anume putea fi, în intregul univers, faptul observat sau — cum mai spune Mill — faptul fizic asertat în cuprinsul definiției numărului 777 864? Din întregul imperiu al faptelor fizice care se volatilizează aici sub ochii noștri, Mill ne specifică unul singur, care ar urma să fie asertat în cadrul definiției numărului 3. Acest fapt constă, după Mill, în existența unor colecții de obiecte care, producînd asupra simțurilor noastre impresia $\substack{0\,0\\0}$, pot fi totodată separate în două părți astfel: 0 0 0. Spre fericirea noastră, nu toate lucrurile din lume sînt bătute în ținte! Căci dacă ar fi fost așa, nu am fi putut efectua această separație și $2+1$ nu ar mai fi fost 3! Ce păcat însă că Mill nu ne-a înfățișat și acele fapte fizice care stau la baza numerelor 0 și 1!

Mill continuă: „După ce această propoziție a fost acceptată, noi numim toate grupările de acest fel 3.“ Constatăm, așadar, că de fapt nu este corect să vorbim despre trei bătăi, atunci cînd ceasul bate trei, sau să numim dulcele, acrul și amarul trei senzații gustative; la fel de inadmisibilă este și expresia „trei metode de rezolvare a

* *System der deduktiven und induktiven Logik,* übersetzt von J. Schiel, III. Buch, XXIV cap., § 5.
** *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

unei ecuații". Într-adevăr, niciunul din cazurile amintite nu oferă o impresia senzorială similară cu cea produsă de 0^0.

Mill spune însă: „Calculele nu decurg din definiția însăși, ci din faptele observate". Dar oare unde ar fi trebuit să apeleze Leibniz la amintitul fapt, în cadrul demonstrației de mai sus a propoziției 2+2=4? Mill omite indicarea acestei lacune, deși propria lui demonstrație pentru propoziția 5+2=7 este absolut analogă demonstrației lui Leibniz*. Adevărata lacună, care rezidă în omiterea parantezelor, nu este sesizată de Mill, cum nu a sesizat-o nici Leibniz.

Dacă definiția fiecărui număr în parte ar aserta într-adevăr un fapt fizic particular, niciodată nu l-am putea admira destul, pentru profunda cunoaștere a naturii de care dă dovadă, pe acel om care operează cu numere cu nouă cifre. Poate că Mill nu merge în această privință atît de departe, încît să susțină că toate aceste fapte ar trebui observate unul cîte unul, ci opiniază că ar fi suficient să derivăm prin inducție o lege generală care să le înglobeze pe toate. Dar dacă încercăm a formula această lege, vom constata că este imposibil. Nu ajunge să spunem: există colecții mari de lucruri, colecții care pot fi separate în părți; căci, spunînd aceasta nu am spus că există colecții de mărimea și felul celor pe care le reclamă, de pildă, definiția numărului 1 000 000 și nici nu am specificat mai exact modul separării lor. Concepția lui Mill duce în mod necesar la cerința ca pentru fiecare număr să existe un fapt observat în mod deosebit, căci în cadrul unei legi generale s-ar pierde tocmai ceea ce este caracteristic pentru numărul 1 000 000 și aparține neapărat definiției acestuia. Potrivit lui Mill, noi nu putem afirma de fapt că 1 000 000 = 999 999 + 1, dacă în prealabil nu am observat acest mod caracteristic de separare în părți a unei colecții de lucruri, mod care diferă de cel propriu oricărui alt număr.

---

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

§ 8. Mill pare a susţine că definiţiile 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1 etc., nu sînt admisibile înainte ca faptele la care dînsul se referă să fi fost observate. Într-adevăr, nu putem să definim 3 ca (2+1), înainte de a fi acordat un sens lui (2+1). Se pune însă întrebarea dacă pentru aceasta este nevoie să observăm colecţia respectivă, precum şi separarea ei în părţi. Dacă ar fi aşa, numărul 0 ar rămîne o enigmă, căci nimeni nu a izbutit pînă în clipa de faţă să vadă sau să pipăie 0 pietricele[33]. Mill ar spune, fără îndoială, că 0 este ceva lipsit de sens, un simplu mod de a vorbi; calculele cu 0 ar fi numai un joc cu semne goale; singurul lucru de mirare ar fi cum de aici mai poate rezulta ceva raţional. Dacă însă aceste calcule au o semnificaţie serioasă, însuşi semnul 0 nu poate fi cu totul lipsit de sens. Dar atunci se conturează de la sine eventualitatea ca, în acelaşi mod ca 0, 2+1 să aibă un sens chiar dacă faptul invocat de Mill nu a fost observat. Într-adevăr, cine ar putea pretinde că a observat acel fapt pe care, după Mill, l-ar conţine definiţia unui număr cu 18 cifre, şi cine ar tăgădui că un asemenea număr are totuşi un sens?

Se va fi crezînd, poate, că de faptele fizice s-ar face uz numai pentru numere mai mici — pînă la 10, să spunem — pe cînd celelalte numere ar putea fi construite plecînd de la acestea. Dar dacă 11 poate fi format din 10 şi 1 printr-o simplă definiţie, fără a trebui să mai vedem colecţia corespunzătoare, atunci nu există un temei să nu putem construi în acelaşi fel şi numărul 2, din 1 şi 1. Dacă operaţiile de calcul efectuate cu numărul 11 nu decurg dintr-un anume fapt caracteristic pentru acest număr, cum se face totuşi că operaţiile cu numărul 2 trebuie să se sprijine pe observarea unei anumite colecţii şi pe o anumită separare caracteristică a acesteia din urmă?

Poate că se va ridica întrebarea: cum ar fi cu putinţă aritmetica, dacă nu am putea distinge prin intermediul simţurilor noastre nici un lucru, sau am putea distinge numai trei lucruri? Nu încape îndoială că o atare stare

de lucruri s-ar răsfrînge nefavorabil asupra cunoașterii de către noi a propozițiilor aritmetice și a aplicațiilor acestora; ar fi însă afectat și adevărul acestor propoziții?[34] Atunci cînd numim empirică o propoziție din motivul că pentru a deveni conștienți de conținutul acesteia a trebuit să facem observații, noi nu folosim cuvîntul „empiric" în sensul în care este opus lui „aprioric". Noi emitem o aserțiune psihologică ce privește numai conținutul propoziției; chestiunea adevărului propoziției nu este luată aici în considerație. În acest sens, poveștile lui Münchhausen sînt și ele empirice; căci, negreșit, pentru ca ele să poată fi născocite au trebuit să fie făcute felurite observații.

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

§ 9. Considerațiile expuse pînă în prezent fac probabilă derivabilitatea formulelor numerice exclusiv pe baza definițiilor numerelor individuale, cu ajutorul cîtorva legi generale, fără ca aceste definiții să aserteze fapte observate sau să presupună legitimitatea unor atare fapte. Se pune deci problema de a stabili natura respectivelor legi.

În demonstrația amintită mai sus a formulei $5+2=7$, Mill* vrea să aplice principiul: „ceea ce este compus din părți este compus din părți ale acestor părți". El consideră această propoziție ca o formulare mai pregnantă a principiului cunoscut îndeobște sub forma: „sumele egalilor sînt egale". Mill o numește adevăr inductiv și lege naturală de ordinul cel mai înalt. Caracteristic pentru impreciziunea expunerii sale este faptul că Mill nu invocă principiul în acel punct al demonstrației în care el însuși îl consideră indispensabil; dar, după cum s-ar părea, adevărul său inductiv este destinat să reprezinte axioma lui Leibniz: „dacă înlocuim egalii prin egali, egalitatea rămîne neschimbată". Dar, pentru a le putea

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

intitula legi ale naturii, Mill conferă adevărurilor aritmetice un sens pe care acestea nu îl au. De exemplu*, el consideră că egalitatea 1=1 ar putea fi falsă, deoarece o greutate de un funt nu cîntărește întotdeauna exact, atît cît alta. Însă propoziția 1=1 nici nu afirmă aceasta.

Mill înțelege semnul + în sensul că acesta ar exprima relația părților unui corp fizic sau ale unei grămezi față de întregul din care fac parte; însă nu acesta este sensul semnului de mai sus. 5+2=7 nu semnifică faptul că turnînd 2 volume de lichid peste 5 volume de lichid obținem 7 volume de lichid; aceasta constituie o aplicație a propoziției, valabilă numai cu condiția ca să nu survină vreo modificare de volum, de exemplu ca urmare a unei reacții chimice. Mill confundă în permanență aplicațiile posibile ale unei propoziții aritmetice, aplicații care sînt adesea de natură fizică și presupun fapte observate, cu înseși propozițiile pur matematice. În numeroase aplicații, semnul plus poate avea, desigur, aparența de a corespunde modului de formare a unei grămezi; nu aceasta este însă semnificația lui; într-adevăr, în cadrul altor aplicații s-ar putea nici să nu fie vorba despre grămezi, agregate sau despre relația unui corp fizic cu părțile sale, spre pildă atunci cind calculul poartă asupra unor evenimente. Firește că și aici putem vorbi despre părți, însă acest cuvînt nu mai este întrebuințat atunci în sens fizic sau geometric, ci în sens logic, ca atunci cînd vorbim despre asasinarea suveranilor ca despre o parte a asasinării în genere. Avem aici cazul subordonării logice. Tot astfel, nici adunarea nu corespunde în general vreunei relații fizice. În consecință, legile generale ale adunării nu pot fi nici ele legi ale naturii.

§ 10. Dar ele nu ar putea fi totuși adevăruri inductive? Cum s-ar putea concepe acest lucru? De la ce fapte ar trebui să pornim pentru a ne ridica la universal? De bună seamă, n-am putea porni decît de la formulele numerice.

---

* *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 3.

Firește că astfel pierdem iar avantajul obținut prin definițiile numerelor individuale și de aceea vom avea să căutăm alte modalități de întemeiere a formulelor numerice. Chiar dacă ocolim această dificultate, nu tocmai neglijabilă, nu vom găsi totuși un teren propice inducției: într-adevăr, lipsește aici uniformitatea care în alte domenii face ca inducția să constituie un procedeu atît de sigur. Încă Leibniz*, la afirmația lui Philalèthe, după care:

> „diferitele moduri ale numărului nu admit altă diferență decît aceea de mai mult sau mai puțin; ca atare, ele sînt moduri simple, ca cele ale spațiului",

dădea următorul răspuns:

> „Aceasta se poate spune despre timp și despre linia dreaptă, însă în nici un caz nu despre figuri și cu atît mai puțin despre numere, care nu sînt numai deosebite ca mărime dar și neasemănătoare. Un număr par poate fi divizat în două părți egale, în timp ce un număr impar nu poate fi astfel divizat. Trei și șase sînt numere triunghiulare, patru și nouă sînt pătrate, opt este cub etc., iar în cazul numerelor aceasta se întîmplă încă și mai des decît în cazul figurilor; într-adevăr. două figuri inegale pot fi perfect asemănătoare, însă în cazul numerelor aceasta nu se întîmplă niciodată"[35].

Fără îndoială, ne-am deprins să considerăm numerele ca fiind în mai multe privințe de același gen; motivul este însă numai acela că noi cunoaștem o mulțime de propoziții generale valabile pentru toate numerele. În cazul de față însă, noi trebuie să presupunem că nici o asemenea lege nu a fost încă descoperită. În fapt, ar fi greu să găsim un exemplu de raționament inductiv corespunzător cazului nostru. În alte împrejurări, ni se întîmplă în mod frecvent să aplicăm propoziția după care o poziție spațială oarecare și un moment arbitrar al timpului sînt în

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 39; ed. Erdmann, p. 243.

și pentru sine la fel de bune ca toate celelalte. Un efect se poate produce la fel de bine într-alt loc și timp, cu singura condiție ca toate celelalte împrejurări să rămînă neschimbate. Dar în cazul numerelor acest principiu cade, întrucît numerele sînt aspațiale și atemporale. În șirul numerelor, pozițiile nu sînt echivalente între ele, așa cum sînt echivalente punctele spațiului[36].

Totodată, numerele se raportează între ele cu totul altfel decît indivizii unei specii animale, să spunem; prin însăși natura sa, fiecare număr are o anumită poziție de ordine, este constituit într-un anume mod propriu și are specificitatea sa, care iese în relief în mod deosebit în cazul lui 0, 1 și 2. În altă parte, atunci cînd întemeiem prin inducție o propoziție asupra unei specii, noi dispunem de obicei de un întreg șir de proprietăți comune, date prin însăși definiția conceptului speciei. În cazul de față, însă, ar fi greu să găsim măcar o singură proprietate comună care să nu necesite ea însăși o demonstrație prealabilă.

Cazul nostru ar putea fi comparat cu cea mai mare ușurință cu cel de mai jos. Să presupunem că forăm un puț și că am observat o creștere constantă a temperaturii, proporțională cu adîncimea; totodată, pînă acum am întîlnit straturi de roci foarte variate. Este limpede că pornind numai de la observațiile făcute cu prilejul acestui foraj nu se poate conchide nimic asupra naturii rocilor mai adînci și că ar fi prematur să afirmăm că variația temperaturii după aceeași regulă va persista. Ce-i drept, conceptului „ceea ce se constată în cazul forajului continuu" i se subsumează atît cele observate pînă acum cît și cele aflate la o adîncime mai mare; dar în cazul de față, aceasta nu ne poate fi de folos. La fel de puțin ne ajută în cazul numerelor și faptul că ele se subsumează în totalitatea lor conceptului „ceea ce se obține prin mărirea continuă cu unu". Între cele două cazuri trebuie trasată o distincție, întrucît straturile sînt numai descoperite, în timp ce prin mărirea repetată cu unu numerele sînt de-a dreptul create și determinate în întreaga lor

natură. Aceasta nu poate să însemne altceva decît că toate proprietăţile unui anumit număr, de pildă numărul 8, sînt derivabile din modul în care acesta a fost generat prin mărirea cu unu. Dar astfel se admite principiul că proprietăţile numerelor decurg din definiţiile acestora şi se deschide posibilitatea demonstrării legilor generale ale numerelor din modul lor comun de generare, în timp ce proprietăţile speciale ale numerelor individuale ar urma să fie derivate din modul special în care ele au fost formate prin mărirea repetată cu unu[37]. Tot astfel, în cazul straturilor terestre, acea proprietate care este determinată exclusiv de adîncimea la care sînt situate, şi anume poziţia lor relativă, poate fi dedusă pe baza acesteia însăşi, fără a mai apela la inducţie; dar o proprietate care nu este determinată astfel nu se poate descoperi nici prin inducţie.

Putem presupune că însuşi demersul inductiv nu poate fi justificat decît cu ajutorul propoziţiilor generale ale aritmeticii — desigur, dacă prin inducţie nu înţelegem o simplă habitudine. Aceasta din urmă nu are, fireşte, virtutea de a garanta adevărul. Demersul ştiinţific ghidat de norme obiective descoperă uneori într-o singură confirmare temeiul unei probabilităţi ridicate, în timp ce alteori respinge o mie de concordanţe ca neavînd aproape nici o valoare; habitudinea, dimpotrivă, este determinată de numărul şi intensitatea impresiilor şi de circumstanţe subiective care nu au nici un drept să influenţeze judecata noastră. Inducţia trebuie să se reazeme pe teoria probabilităţilor, deoarece ea nu poate face nicicînd o propoziţie mai mult decît probabilă. Este însă de neînţeles cum ar putea fi dezvoltată această teorie, dacă nu presupunem legi ale aritmeticii[38].

§ 11. Leibniz* consideră, dimpotrivă, că adevărurile necesare, cum sînt cele întîlnite în aritmetică, trebuie să aibă principii a căror demonstrare nu depinde de exemple

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, pp. 13—14 (ediţia Erdmann, pp. 195, 208—209).

și astfel nici de evidența simțurilor, deși fără existența simțurilor nimeni nu ar fi avut prilejul să le gîndească. „Întreaga aritmetică ne este înnăscută și în mod virtual se găsește înăuntrul nostru". Un alt pasaj* ne explică ceea ce înțelege Leibniz prin expresia „înnăscut": „Nu este adevărat că tot ceea ce se învață nu este înnăscut. Adevărurile numerelor sînt în noi și nu mai puțin ele sînt învățate fie prin extragerea lor de la sursă, atunci cînd sînt învățate la modul demonstrativ (ceea ce arată tocmai faptul că ele sînt înnăscute), fie . . ."[39].

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori, sau sînt analitice?

§ 12. Considerînd opoziția între analitic și sintetic, se obțin patru combinații, dintre care însă una, și anume

analitic *a posteriori,*

cade. Dacă optăm, împreună cu Mill, pentru *a posteriori,* nu ne mai rămîne așadar nici o alegere, încît ne mai rămîne să examinăm posibilitățile

sintetic *a priori*

și

analitic.

Kant se pronunță pentru prima. În acest caz, nu mai rămîne altă alternativă decît invocarea unei intuiții pure ca temei ultim de cunoaștere, deși în cazul de față este greu de spus dacă este vorba despre o intuiție spațială, temporală sau de orice alt gen. Baumann** este de acord cu Kant, deși din motive întrucîtva diferite. După Lipschitz***, de asemenea, propozițiile care afirmă independența numărului față de modalitatea numărării, precum și față de comutativitatea și asociativitatea termenilor sumei, derivă din intuiția interioară. Hankel**** fundează

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 38 (ed. Erdmann, p. 212).
** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.
*** *Lehrbuch der Analysis*, vol. I, p. 1 (Bonn, 1877).
**** *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 54 și 55.

teoria numerelor reale pe trei principii, cărora le conferă caracterul de *notiones communes*: „Explicaţia le face perfect evidente, ele sînt valabile pentru mărimile oricărui domeniu, conform intuiţiei pure a mărimii şi, fără a pierde caracterul pe care-l au, pot fi transformate în definiţii, dacă precizăm că prin adunare a mărimilor vom înţelege o operaţie care satisface aceste propoziţii". În ultima aserţiune există ceva neclar. Chiar dacă definiţia ar putea fi construită, ea nu poate înlocui propoziţiile fundamentale iniţiale; într-adevăr, aplicarea definiţiei ar ridica iarăşi problema dacă numerele sînt mărimi şi dacă ceea ce obişnuim a numi adunare a numerelor este adunare în sensul acestei definiţii. Pentru a răspunde, ar trebui să cunoaştem deja acele propoziţii iniţiale asupra numerelor. Mai departe, este şocantă expresia „intuiţie pură a mărimii". Dacă reflectăm la tot ce se numeşte mărime: numere, lungimi, suprafeţe, volume, unghiuri, curburi, mase, viteze, forţe, luminozităţi, intensităţi ale curentului electric ş.a., înţelegem foarte bine modul cum ele se pot subsuma unui concept unic al mărimii; în schimb, expresiile „intuiţie a mărimii" şi cu atît mai mult „intuiţie pură a mărimii" nu sînt admisibile. Eu nu pot admite nici măcar o intuiţie a lui 100 000, şi cu atît mai puţin a numărului în general, sau chiar a mărimii în general. Cu prea multă uşurinţă apelăm la intuiţia interioară, ori de cîte ori nu putem invoca un alt temei. Ar fi recomandabil însă să nu pierdem chiar cu totul din vedere sensul cuvîntului „intuiţie".

În *Logica* sa (ed. Hartenstein, vol. VIII, p. 88), Kant defineşte intuiţia după cum urmează: „Intuiţia este o reprezentare individuală *(repraesentatio singularis)*, conceptul este o reprezentare generală *(repraesentatio per notas communes)* sau reflexivă *(repraesentatio discursiva)*."

Aici nu se face menţiune despre raportarea la sensibilitate, deşi aceasta este presupusă tacit în cadrul esteticii transcendentale, şi deşi în absenţa ei intuiţia nu poate constitui principiul de cunoaştere a judecăţilor sin-

tetice apriorice. În *Critica rațiunii pure* (ed. Hartenstein, III, p. 55), se spune: „Prin intermediul sensibilității deci ne sînt *date* obiecte, și ea singură ne procură *intuiții*“[40]. Prin urmare, în logică, sensul termenului „intuiție“ este mai larg decît în estetica transcendentală. În sens logic, am putea spune, eventual, că 100 000 este o intuiție; căci, ce-i drept, concept general nu este. Dar dacă luăm intuiția în acest sens, ea nu poate contribui la fundamentarea legilor aritmeticii.

§ 13. În genere, va fi indicat să nu supraestimăm înrudirea aritmeticii cu geometria. Am adus mai sus un pasaj din Leibniz, unde această idee este combătută. Luat în sine, un punct geometric nu poate fi distins în nici un mod de oricare alt punct; același lucru este valabil pentru drepte și plane. Abia atunci cînd intuiția cuprinde simultan mai multe puncte, drepte, plane, ele ajung să fie distinse. Faptul că în geometrie propozițiile generale trebuie derivate din intuiție este cît se poate de evident, întrucît punctele, dreptele, planele intuite nu au propriu-zis vreo particularitate și ca atare sînt autorizate să reprezinte întregul gen. În cazul numerelor, lucrurile stau altfel: fiecare număr își are particularitățile sale. Ca atare, nu se poate spune de la bun început în ce măsură un anumit număr poate reprezenta toate celelalte numere și unde intervine specificitatea sa.

§ 14. Compararea adevărurilor în raport cu domeniile pe care le guvernează pledează la rîndul ei împotriva naturii empirice și sintetice a legilor aritmetice.

Propozițiile empirice sînt valabile pentru realitatea fizică sau psihologică, adevărurile geometrice guvernează domeniul intuiției spațiale, indiferent dacă este vorba de ceva real sau de un produs al imaginației noastre. Viziunile delirante cele mai stranii, invențiile cele mai îndrăznețe ale mitului și poeziei, unde animalele vorbesc și stelele încremenesc, pietrele se prefac în oameni și oamenii se prefac în copaci, iar cel ce se cufundă în mlaștină iese de acolo trăgindu-se singur de propriul său păr —

toate acestea, în măsura în care rămîn intuibile, ascultă totuși de axiomele geometriei. Numai gîndirea conceptuală se poate elibera într-un anume mod de sub dominația acestor axiome, atunci cînd ea postulează, să spunem, un spațiu cu patru dimensiuni sau cu o curbură pozitivă. Aceste cercetări nu sînt cîtuși de puțin inutile; ele părăsesc însă cu totul terenul intuiției. Dacă totuși se apelează și la ajutorul acesteia, ea este tot intuiția spațiului euclidian, unicul spațiu ale cărui configurații le putem intui. Numai că, atunci, intuiția nu va fi luată așa cum este ea, ci ca simbolizînd altceva; de exemplu, numim drept sau plan ceea ce este totuși intuit ca o curbă. Pentru țelurile gîndirii conceptuale putem postula întotdeauna contrariul unei axiome geometrice, fără să ajungem la autocontradicții, raționînd și trăgînd concluzii din asemenea ipoteze care contrazic intuiția. Această posibilitate ne arată că axiomele geometriei sînt independente unele față de altele și sînt totodată independente de legile originare ale logicii, ele fiind, așadar, sintetice[41]. Putem spune însă același lucru despre propozițiile fundamentale ale științei numerelor? Oare nu ajungem la o confuzie totală, dacă încercăm să negăm una din aceste propoziții? Ar mai fi posibil să gîndim în acest caz? Și oare însăși fundația aritmeticii nu este mai adîncă, în comparație cu orice știință empirică, inclusiv geometria? Adevărurile aritmetice guvernează domeniul a tot ce este numărabil, adică domeniul cel mai cuprinzător, care înglobează nu numai realul, nu numai intuitivul, ci și tot ceea ce poate fi gîndit. De aceea, este firesc ca legile numerelor să se afle într-o legătură intimă cu legile gîndirii.

§ 15. Afirmațiile lui Leibniz pot fi interpretate numai în favoarea caracterului analitic al legilor numărului; faptul era de prevăzut, deoarece pentru Leibniz aprioricul coincide cu analiticul. Astfel, el afirmă* că foloasele pe care le aduce algebra sînt împrumutate de la o artă mult

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 56 (ed. Erdmann, p. 424).

mai înaltă, şi anume aceea a adevăratei logici[42]. În alt loc*, el compară adevărurile necesare şi contingente cu mărimile comensurabile şi incomensurabile şi opinează că adevărurile necesare permit o demonstraţie sau o reducere la identităţi[43]. Totuşi, aceste declaraţii îşi pierd din greutatea lor, dat fiind că Leibniz înclină să privească toate adevărurile ca fiind demonstrabile**: „...orice adevăr îşi are proba sa *a priori*, scoasă din noţiunea termenilor, deşi nu este totdeauna în puterea noastră să ajungem la această analiză“[44]. Pe de altă parte, comparaţia cu comensurabilitatea şi incomensurabilitatea mărimilor ridică desigur o nouă barieră de netrecut, cel puţin pentru noi, între adevărurile necesare şi cele contingente.

Foarte hotărît se pronunţă în favoarea caracterului analitic al legilor numărului W. Stanley Jevons***: „Algebra este o logică superior dezvoltată, iar numărul doar un caracter distinctiv logic“[45].

§ 16. Dar această concepţie comportă şi ea anumite dificultăţi. E cu putinţă ca arborele ştiinţei numărului, acest arbore tot mai înalt, tot mai ramificat şi în continuă creştere să-şi aibă rădăcinile în simple identităţi? Pe de altă parte, cum ajung formele goale ale logicii să-şi reverse în afară un asemenea conţinut?

După opinia lui Mill: „Teoria potrivit căreia, printr-o manipulare iscusită a limbajului, putem descoperi fapte şi dezvălui procesele ascunse ale naturii contrazice într-atîta bunul-simţ, încît cine ajunge să creadă aceasta trebuie să fi făcut deja unele progrese în materie de filosofie“[46].

Aceasta este adevărat, cu condiţia ca în cursul iscusitei manipulări să nu gîndim deloc. Mill critică aici un anumit gen de formalism care numai cu greu şi-ar găsi un apărător. Oricine foloseşte cuvinte sau simboluri mate-

---

* *Ibidem*, p. 57 (ed. Erdmann, p. 83).
** *Ibidem* (ed. Pertz, vol. II, p. 55).
*** *The Principles of Science*, London, 1879, p. 156.

matice pretinde că ele înseamnă ceva și nimeni nu va aștepta ca să rezulte ceva cu sens din simboluri goale. Un matematician poate să efectueze însă calcule complicate, fără ca să înțeleagă prin semnele sale ceva intuitiv, perceptibil prin simțuri. Aceasta nu face ca semnele respective să fie lipsite de sens; conținutul acestor semne trebuie însă deosebit de semnele înseși, chiar dacă acest conținut nu ar putea fi conceput decît tot cu ajutorul semnelor. Ne dăm seama că pentru același lucru puteau fi instituite alte semne. Este suficient să știm cum trebuie tratat logic conținutul sensibilizat în semne, iar dacă urmărim aplicarea calculelor în fizică mai trebuie să știm cum se efectuează trecerea la fenomene. Dar sensul real al propozițiilor nu trebuie văzut într-o asemenea aplicație. Universalitatea propozițiilor se pierde în mare măsură cu acest prilej, în joc intrînd un element particular, care variază de la o aplicație la alta[47].

§ 17. Oricît am diminua rolul deducției, nu se poate contesta că legile stabilite prin inducție nu sînt suficiente. Din aceste legi trebuie derivate propoziții noi, care nu sînt cuprinse în nici una din acele legi luate fiecare în parte. Noile propoziții sînt într-un fel cuprinse în toate aceste legi luate împreună, dar aceasta nu ne scutește de efortul de a le explicita, desprinzîndu-le și dîndu-le o formulare independentă. În felul acesta se deschide următoarea posibilitate. În loc de a conecta în mod direct lanțul deducțiilor cu un anumit fapt, putem lăsa acest fapt acolo unde se află, introducînd conținutul său ca o condiție. Înlocuind astfel toate faptele dintr-un șir de gînduri prin condiții, rezultatul se va prezenta sub forma dependenței unei consecințe de un șir întreg de condiții. Acest adevăr ar fi stabilit numai prin gîndire sau, ca să folosim expresia lui Mill, prin manipularea iscusită a limbajului. Nu este exclus ca legile numărului să fie de acest gen. Atunci ele ar fi judecăți analitice, cu toate că de regulă ele nu ar fi descoperite numai prin intermediul gîndirii; într-adevăr, ceea ce ne interesează aici nu este modul în care au fost găsite, ci genul de temei pe care se

sprijină demonstrația; sau, după cum spune Leibniz*, „nu este vorba aici despre istoria descoperirilor noastre, care diferă de la un om la altul, ci despre conexiunea și ordinea naturală, mereu aceeași, a adevărurilor". Observației i-ar reveni atunci sarcina de a stabili, în ultimă instanță, dacă condițiile cuprinse în legile astfel întemeiate sînt satisfăcute. În cele din urmă vom ajunge în aceeași situație în care ne-am fi aflat dacă am fi legat direct lanțul deducțiilor de faptele observate. Dar procedeul indicat aici este preferabil în numeroase cazuri, deoarece el conduce la o propoziție universală a cărei aplicabilitate nu este limitată neapărat la faptele aflate în prealabil la dispoziția noastră. Adevărurile aritmeticii s-ar raporta în acest caz la adevărurile logicii în același mod în care teoremele geometriei se raportează la axiomele geometriei. Fiecare ar concentra în sine un șir întreg de raționamente în vederea unei utilizări ulterioare, avantajul fiind acela că nu mai avem nevoie să efectuăm raționamentele separate, unul cîte unul, ci putem exprima simultan rezultatul întregului șir**. Dacă este așa, atunci, într-adevăr, grație dezvoltării prodigioase a teoriilor aritmetice și diverselor lor aplicații, disprețul atît de răspîndit față de judecățile analitice, precum și legenda sterilității logicii pure se vor spulbera de la sine.

Dacă această concepție — care nu a fost exprimată acum pentru intîia oară — ar putea fi elaborată în amănunt cu o rigoare care să înlăture cel mai mic dubiu, rezultatul, după părerea mea, nu ar fi nicidecum lipsit de importanță[48].

---

* *Nouveaux Essais*, IV, § 9; ed. Erdmann, p. 360.

** Este semnificativ că și MILL (*op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 4) pare să exprime această opinie. Simțul sănătos al lui Mill învinge chiar, din cînd în cînd, părerea sa preconcepută în favoarea empiricului. Dar aceeași părere preconcepută îl readuce la confuzia inițială, făcîndu-l să confunde aplicațiile fizice ale aritmeticii cu aritmetica însăși. Mill pare a nu-și da seama de faptul că o judecată ipotetică poate fi adevărată chiar și atunci cînd condiția nu este adevărată.

II. **Opiniile unor autori asupra conceptului de număr**

§ 18. Îndreptîndu-ne acum atenția asupra obiectelor originare ale aritmeticii, facem deosebirea între numerele individuale, ca 3, 4 și așa mai departe, și conceptul general de număr. Or, noi am văzut deja că numerele individuale sînt derivate în mod optim în felul propus de către Leibniz, Mill, H. Grassmann și alții — adică plecînd de la numărul unu și de la adunarea cu unu — dar că aceste definiții rămîn incomplete atîta timp cît numărul unu și adunarea cu unu rămîn ele însele neexplicate. Am văzut că pentru a deriva formulele numerice din aceste definiții trebuie să facem apel la propoziții generale. Dar, tocmai datorită caracterului lor general, asemenea legi nu pot decurge din definițiile numerelor individuale, ci numai din conceptul general de număr. Vom supune acum însuși acest concept unui examen mai amănunțit. Ne putem aștepta atunci ca atît numărul unu cit și adunarea cu unu să reclame o explicație, astfel încît definiția fiecărui număr în parte va trebui la rîndul ei completată.

§ 19. Aici, aș dori să obiectez de-a dreptul împotriva încercării de a înțelege numărul în mod geometric, ca raport numeric al lungimilor sau suprafețelor. Evident, s-a crezut că numeroasele aplicații ale aritmeticii în geometrie vor fi facilitate prin raportarea cît mai intimă a primelor elemente înseși.

Newton* pretinde să se înțeleagă prin număr nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei mărimi oarecari față de o altă mărime de același gen care este luată ca unitate[49]. Se poate admite că prin aceasta este descris într-un mod adecvat numărul, în acel sens larg în care el înglobează totodată fracțiile și numerele iraționale; dar în acest caz conceptele de mărime și de raport între mărimi sînt presupuse. Ca atare, se pare că o definire a numărului în sens restrîns, a numărului cardinal

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 475 [*Arithmetica Universalis*, vol. I, cap. II, 3].

[Anzahl] nu ar fi inutilă; într-adevăr, pentru a defini egalitatea a două rapoarte între lungimi, Euclid foloseşte noţiunea de multiplu egal; or, multiplul egal revine tot la o identitate numerică[50]. S-ar putea totuşi ca egalitatea rapoartelor între lungimi să fie definibilă independent de conceptul de număr. Dar şi atunci am rămîne totuşi în necunoştinţă de cauză asupra relaţiei în care numărul definit geometric în acest mod s-ar afla faţă de numărul din viaţa de toate zilele. Acesta din urmă ar fi atunci cu totul despărţit de ştiinţă. Or, de bună seamă, aritmeticii îi putem pretinde ca să ne ofere neapărat premisele oricărei aplicări a numărului, chiar dacă aplicarea însăşi nu cade în sarcina aritmeticii. Pînă şi socotitul obişnuit trebuie să-şi afle în ştiinţă întemeierea procedurilor sale. Dar se ridică întrebarea dacă aritmetica însăşi se poate mulţumi cu un concept geometric al numărului, atunci cînd ne referim la numărul rădăcinilor unei ecuaţii, la numărul numerelor prime cu un număr şi mai mici decît el, sau la alte cazuri asemănătoare. În schimb, numărul care răspunde la întrebarea „cît?“, „cîte?“, este capabil să indice şi cîte unităţi sînt cuprinse într-o lungime. Calculul cu numere negative, raţionale şi iraţionale poate fi redus la calculul cu numerele naturale. Nu este însă exclus ca Newton să fi înţeles prin mărimi — numărul fiind definit ca raport între mărimi — nu numai mărimi geometrice, ci şi mulţimi. Dar în acest caz definiţia sa nu este utilizabilă în scopul nostru, deoarece expresia „raportul unei mulţimi faţă de unitatea de mulţime“ nu oferă mai multă informaţie decît expresia „număr prin care este determinată o mulţime“.

§ 20. Prima chestiune va fi acum aceea dacă numărul poate fi definit. Hankel* declară că nu: „Simplitatea principială a noţiunii de instituire [Setzung] nu îngăduie să se definească ceea ce înseamnă a gîndi sau a institui un obiect o dată, de două ori, de trei ori . . .“. Aici este însă mai puţin vorba despre instituire decît despre o dată, de

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.

două ori, de trei ori. Dacă s-ar putea defini acestea din urmă, faptul că instituirea nu poate fi definită ne-ar îngrijora prea puțin. Leibniz înclină să considere numărul ca o idee adecvată, sau aproximativ adecvată, adică o idee atît de clară încît tot ce se află în cuprinsul ei este de asemenea clar.

Dacă lumea înclină să considere că numărul nu poate fi definit, acest fapt se datorește mai degrabă eșecului tentativelor de a-l defini, decît existenței unor temeiuri ale indefinibilității deduse din natura lucrului însuși.

Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?[51]

§ 21. Să încercăm cel puțin a indica locul numărului printre conceptele noastre. În cadrul limbii, numerele apar de cele mai multe ori în formă adjectivală și în construcție atributivă, la fel ca și cuvintele: tare, greu, roșu, care semnifică proprietăți ale lucrurilor exterioare[52]. În mod firesc, se ridică intrebarea dacă fiecare număr în parte ar urma să fie conceput în mod asemănător și dacă, drept urmare, conceptul numărului ar putea fi alăturat, de pildă, celui al culorii.

S-ar părea că aceasta este opinia lui M. Cantor*[53], atunci cînd el caracterizează matematica drept o știință empirică, întrucît ea își trage obîrșia din considerarea lucrurilor lumii exterioare. Numărul ar apare numai prin abstracție de la obiecte[54].

După E. Schröder** numărul copiază realitatea prin aceea că unitățile [Einheiten] sînt înfățișate prin intermediul unu-urilor. Acest proces, Schröder îl numește abstragerea numărului. Copierea prezintă unitățile numai sub raportul frecvenței lor, toate celelalte determinări ale lucrurilor

* *Grundzüge einer Elementarmathematik*, p. 2, § 4. Similar, LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, Bonn, 1877, p. 1.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig, 1873, pp. 6, 10 și 11.

— de pildă culoarea și forma — fiind lăsate la o parte. În cazul de față, frecvența nu este decît o altă denumire a numărului. Prin urmare, Schröder pune frecvența sau numărul pe același plan cu culoarea și forma, considerînd-o drept o proprietate a lucrurilor.

§ 22. Baumann* respinge ideea că numărul ar fi un concept desprins din lucrurile exterioare: „Căci lucrurile exterioare nu ni se înfățișează ca unități stricte; ele se prezintă ca grupuri delimitate sau puncte senzoriale, pe care însă avem libertatea de a le privi iarăși ca pluralități". Într-adevăr, deși eu nu sînt în stare să modific cîtuși de puțin culoarea sau duritatea unui lucru numai pe baza modului în care îl gîndesc, eu pot gîndi *Iliada* ca pe un unic poem, ca 24 de cînturi sau ca un mare număr de versuri. Și oare nu vorbim despre 1000 de frunze ale unui copac într-un sens cu totul diferit de acela în care vorbim despre frunzele sale verzi? Culoarea verde o atribuim fiecărei frunze în parte, dar nu tot astfel stau lucrurile cu numărul 1 000. Putem cuprinde toate frunzele copacului sub denumirea de frunziș. Frunzișul este și el verde, dar nu este numărul 1 000. Dar atunci cui îi revine propriu-zis proprietatea 1 000? Aproape s-ar părea că ea nu aparține nici fiecărei frunze în parte și nici totalității; nu cumva ea propriu-zis nici nu aparține cîtuși de puțin lucrurilor din lumea exterioară? Dacă îi dau cuiva o piatră și îi spun: stabilește ce greutate are — prin aceasta eu i-am definit integral obiectul cercetării sale. Dar dacă îi înmînez un pachet de cărți de joc, spunîndu-i: stabilește numărul respectiv, — persoana în cauză nu știe dacă eu doresc să aflu numărul cărților, cel al jocurilor complete sau, să zicem, cel al atuurilor de la o partidă de skat. Prin faptul că i-am pus pachetul de cărți în mînă eu nu i-am determinat încă în mod complet obiectul cercetării sale; mai trebuie să adaug un cuvînt: carte de joc, partidă, atu[55]. De asemenea, nu se poate afirma nici că diferitele numere se află aici unul lîngă altul, așa cum s-ar afla di-

* *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

feritele culori. Eu pot arăta fiecare întindere colorată în parte, fără a pronunța un cuvînt, dar nu pot face aceasta în cazul fiecărui număr în parte. Dacă un anumit obiect îl pot numi cu egală îndreptățire verde și roșu, aceasta înseamnă că obiectul respectiv nu este suportul real al verdelui. Pe acesta îl am abia într-o întindere care este în întregime verde. Tot astfel, un obiect căruia îi pot atribui cu egală îndreptățire numere diferite nu poate fi suportul real al unui număr[56].

O deosebire esențială între culoare și număr rezidă, așadar, în faptul că culoarea albastră a unei întinderi aparține acesteia independent de bunul nostru plac. Culoarea albastră este capacitatea de a reflecta anumite raze de lumină și a absorbi într-o măsură mai mare sau mai mică alte raze, iar în această privință modul nostru de a concepe lucrurile nu poate determina nici cea mai mică modificare. Dimpotrivă, eu nu pot spune că pachetului de cărți de joc îi revine în sine numărul 1 sau numărul 100 sau oricare alt număr; pot spune, cel mult, că numărul respectiv îi revine în raport cu modul nostru arbitrar de a concepe[57] și, chiar în acest caz, nu în sensul că i-am putea atribui numărul pur și simplu ca un predicat. Ceea ce noi decidem a numi joc complet constituie, evident, o stipulare arbitrară, în care pachetul de cărți de joc nu are un cuvînt de spus. Întrucît noi însă îl considerăm sub acest raport, vom descoperi, eventual, că îl putem numi două jocuri complete. Dacă cineva nu ar ști ce se numește joc complet, ar găsi, de bună seamă, un oarecare număr, diferit de numărul doi, pentru acest pachet.

§ 23. La întrebarea: cui îi aparține ca proprietate numărul, Mill* dă următorul răspuns:

„Numele unui număr denotă o proprietate ce aparține acelui agregat de lucruri pe care îl desemnăm prin acest nume; iar această proprietate este modul caracteristic în

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

care agregatul este compus din părţi şi poate fi separat în părţi".

Aici o primă eroare este folosirea articolului hotărît din expresia „modul caracteristic", întrucît există moduri foarte diferite în care un agregat poate fi separat în părţi şi nu se poate spune că numai unul din acestea ar fi cel caracteristic. De exemplu, o legătură de paie poate fi separată în părţile sale prin tăierea în două a tuturor paielor sale sau prin desfacerea sa, pai cu pai, sau făcînd din ea două legături. Mai departe, oare o grămăjoară de o sută boabe de nisip este compusă în exact acelaşi fel ca o legătură de 100 paie? Şi totuşi, avem de-a face cu acelaşi număr. Numeralul „unu" din expresia „un pai" nu exprimă însă modul în care acest pai este compus din celule sau molecule. O dificultate şi mai mare este suscitată de numărul 0. Mai departe, este oare în genere obligatoriu ca paiele să formeze o legătură, pentru ca să poată fi numărate? Oare este necesar să organizăm o întrunire a tuturor orbilor din Germania pentru ca expresia „Numărul orbilor din Germania" să aibă sens? O mie de boabe de grîu încetează să mai fie o mie de boabe de grîu după ce-au fost treierate? Şi oare există în sensul proprîu al cuvîntului agregate de demonstraţii ale unei teoreme sau agregate de evenimente? Şi totuşi, acestea pot fi de asemenea numărate. Totodată, este indiferent dacă evenimentele au loc simultan sau la o distanţă de milenii.

§ 24. Ajungem astfel la un alt motiv pentru a nu pune numărul pe acelaşi plan cu culoarea şi duritatea: aplicabilitatea sa mult mai largă.

Mill* consideră că adevărul după care ceea ce se compune din părţi se compune din părţi ale acestor părţi este valabil pentru toate fenomenele naturii, întrucît toate acestea pot fi numărate. Dar oare nu pot fi numărate şi multe alte lucruri? Locke** spune: „Numărul se aplică

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.
** BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 409.

la oameni, îngeri, acţiuni, gînduri — la tot ceea ce ori există, ori poate fi imaginat"[58]. Leibniz* respinge concepţia scolasticilor după care numărul ar fi inaplicabil la lucrurile incorporale şi caracterizează numărul ca o anume figură incorporală, apărută prin reunirea unor lucruri absolut oarecari, de exemplu prin reunirea lui Dumnezeu, a unui inger, a unui om, a mişcării, care, toate la un loc, sînt patru. De aceea, crede el, numărul este ceva absolut universal, aparţinînd metafizicii[59]. Într-un alt pasaj**, el spune: „Ceea ce nu are forţă şi putere nu poate fi cîntărit; ceea ce nu are părţi nu poate avea vreo măsură; dar nu există nimic ce nu ar admite numărul. Aşadar, numărul este, ca să spunem aşa, figura metafizică"[60].

Ar fi într-adevăr uimitor dacă o proprietate abstrasă din lucrurile exterioare ar putea fi transpusă fără vreo modificare de sens asupra unor evenimente, reprezentări şi concepte. Ar fi ca şi cum am vrea să vorbim despre un eveniment fuzibil, o reprezentare albastră, un concept sărat sau o judecată tare.

Este absurd ca ceea ce este nesenzorial să manifeste ceva ce prin însăşi natura sa este senzorial. Atunci cînd privim o suprafaţă albastră, obţinem o impresie specifică ce corespunde cuvîntului „albastru"; această impresie o recunoaştem iarăşi atunci cînd contemplăm o altă suprafaţă albastră. Dacă am presupune, în mod analog, că atunci cînd privim un triunghi, există ceva senzorial care corespunde cuvîntului „trei", ar trebui să regăsim acest element senzorial şi în cazul a trei concepte; aşadar, ceva non-senzorial ar avea în sine însăşi ceva senzorial. Fără îndoială, putem admite că o impresie senzorială de un anume gen corespunde cuvîntului „triunghiular", dar atunci acest cuvînt trebuie luat ca un întreg indivizibil[61]. Noi nu vedem în mod imediat pe treiul de acolo; în schimb vedem ceva ce poate declanşa o activitate intelectuală

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 56.
** *Op. cit.*, p. 2.

care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3[62]. Căci, într-adevăr, cum ajungem să percepem, de pildă, numărul figurilor silogistice stabilite de Aristotel? Le percepem cu ochii? Vedem, cel mult, anumite semne care reprezintă aceste figuri de raționament, dar nu le vedem pe acestea însele. Cum s-ar putea să vedem numărul acestora, dacă ele însele rămîn invizibile? Dar poate că cineva își închipuie că este de ajuns să vedem semnele; numărul lor este identic cu numărul figurilor silogistice. Dar cum ajungem să știm acest lucru? Pentru aceasta se cere ca noi să fi stabilit deja într-un alt mod ultimul număr. Sau poate că propoziția „numărul figurilor silogistice este patru“ constituie doar o altă expresie pentru „numărul semnelor figurilor silogistice este patru“? Cîtuși de puțin! Despre semne nu trebuie să afirmăm nimic; nimeni nu vrea să audă ceva despre ele, în cazul cînd o proprietate a acestora nu manifestă totodată o proprietate a ceea ce ele desemnează[63]. Totodată, întrucît unul și același lucru poate fi simbolizat în diferite moduri, fără ca prin aceasta să păcătuim împotriva logicii, nici nu se mai cere ca numărul semnelor să coincidă cu numărul celor desemnate.

§ 25. În timp ce pentru Mill numărul constituie ceva de ordin fizic, pentru Locke și Leibniz el subzistă numai în idee. E adevărat că, după cum spune Mill*, două mere sînt fizic distincte de trei mere, la fel cum doi cai sînt fizic distincți de un singur cal, constituind în mod vizibil și tangibil un fenomen distinct**. Dar putem oare conchide pe această bază că însușirea de a fi doi, însușirea de a fi trei constituie ceva de ordin fizic? Una pereche de ghete poate constitui același fenomen vizibil și tangibil ca și două ghete. Avem aici o diferență de număr care nu

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** Strict vorbind, ar trebui să adăugăm: cu condiția ca el să fie în genere un fenomen. Dacă însă cineva are un cal în Germania și unul în America (și nu mai are un alt cal), atunci el posedă doi cai. Aceștia nu formează însă un fenomen; numai fiecare dintre acești cai în parte ar putea fi astfel caracterizat.

corespunde unei diferențe fizice;[64] într-adevăr, *doi* și *una pereche* nu sînt nicidecum identice, cum Mill pare să-și închipuie într-un mod atît de ciudat. Și, în sfîrșit, cum este cu putință ca două concepte să fie fizic distincte de trei concepte?

Așa cum spune Berkeley*: „Trebuie să avem în vedere că numărul nu este ceva fix și stabilit, nu este existent real în lucrurile înseși. El este întru totul o creație a cugetului care privește fie o idee în sine, fie o combinație de idei căreia îi dă un nume, făcînd-o astfel să treacă drept o unitate. În funcție de modul variat în care cugetul combină ideile sale, variază și unitatea, iar așa cum variază unitatea, variază și numărul, care este numai o colecție de unități. Spunem că o fereastră este una, un horn este unul; și totuși o casă care are multe ferestre și multe hornuri este una iar multe case ajung să facă un oraș"[65].

Este numărul ceva subiectiv?[66]

§ 26. Această orientare de idei poate conduce cu ușurință la considerarea numărului drept ceva subiectiv. S-ar părea că modul în care numărul apare înăuntrul nostru ar putea oferi o explicație a naturii sale. Am ajunge atunci la o investigație de ordin psihologic. Într-adevăr, iată ce afirmă Lipschitz în acest sens**:

„Acel ce dorește să cuprindă un ansamblu de lucruri va începe cu un anumit lucru determinat și va continua prin a adăuga mereu cîte un lucru nou celor anterioare". Această caracterizare pare a fi mult mai adecvată pentru descrierea modului în care căpătăm, să spunem, intuiția unei constelații, decît pentru formarea numărului. Intenția de a cuprinde un ansamblu este irelevantă, căci cu

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 428.

** *Lehrbuch der Analysis*, p. 1. Pornesc de la premisa că Lipschitz are în vedere un fenomen interior.

greu s-ar putea spune că o turmă devine mai ușor de cuprins dacă știm din cîte capete este alcătuită.

O asemenea descriere a proceselor lăuntrice care preced emiterea unei judecăți numerice nu poate în nici un caz — nici măcar într-un context mai adecvat — să înlocuiască o definiție propriu-zisă a conceptului. Ea nu va putea fi invocată niciodată in demonstrarea unei propoziții aritmetice; ea nu ne permite să aflăm vreo proprietate a numerelor. Într-adevăr, numărul nu este un obiect al psihologiei sau un produs al fenomenelor psihice mai mult decît Marea Nordului, să spunem[67]. Obiectivitatea Mării Nordului nu este afectată cu nimic de faptul că putem decide în mod arbitrar care parte a suprafeței totale acoperită de apă a Pămîntului o vom delimita spre a-i atribui numele „Marea Nordului". Acesta nu este un motiv care să ne facă să cercetăm Marea Nordului prin metode ale psihologiei. Tot astfel, numărul este și el ceva obiectiv. Spunînd: „Marea Nordului are o suprafață de 10 000 mile pătrate", noi nu ne referim nici prin „Marea Nordului", nici prin „10 000" la o stare sau la un fenomen din forul nostru lăuntric, ci, dimpotrivă, afirmăm ceva absolut obiectiv, ceva independent de reprezentările noastre și de alte lucruri de același gen. Dacă cu un alt prilej am vrea să delimităm într-un mod diferit marginile Mării Nordului sau să înțelegem altceva prin „10 000", conținutul care înainte era adevărat nu ar deveni prin aceasta fals; dar locul unui conținut adevărat l-ar putea lua un conținut fals, ceea ce nu anulează însă în nici un caz adevărul primului.

Atunci cînd un botanist indică numărul petalelor unei flori, el înțelege să afirme ceva tot atit de factual ca atunci cînd el indică culoarea aceleiași flori[68]. Nici una dintre aceste caracteristici nu depinde mai mult decît cealaltă de bunul nostru plac. Așadar, o anumită asemănare între număr și culoare există, dar ea nu rezidă în faptul că ambele pot fi percepute senzorial în lucrurile exterioare, ci în faptul că ambele sînt obiective.

Eu fac o distincție între ceea ce este obiectiv și ceea ce

este imediat sesizabil, spaţial sau real. Axa Pămîntului şi centrul de gravitate al sistemului solar sînt obiective, dar eu n-aş spune că sînt reale, aşa cum real este Pămîntul însuşi. Vorbim adesea despre ecuator ca despre o linie i m a g i n a r ă; ar fi însă fals să spunem că este o linie i m a g i n a t ă; ea nu provine din gîndire, nu este rezultatul unui proces psihic, gîndirea nu face decît să o recunoască, să o conceapă ca atare. Dacă a fi recunoscut ar însemna a fi generat, atunci nu am putea afirma nimic pozitiv despre ecuator, referitor la perioada care precede această pretinsă geneză[69].

Potrivit lui Kant, spaţiul aparţine aparenţei [fenomenalităţii]. S-ar putea ca altor fiinţe raţionale spaţiul să li se înfăţişeze cu totul altfel decît ni se înfăţişează nouă. Mai mult, nu putem şti nici măcar dacă spaţiul îi apare unui om la fel cum îi apare altuia; într-adevăr, noi nu putem pune intuiţia spaţială a unui om lîngă intuiţia altuia, spre a le compara. Şi totuşi, aici este conţinut ceva obiectiv; toţi recunosc aceleaşi axiome geometrice, fie şi numai prin faptă, şi sînt obligaţi la aceasta spre a se orienta în univers[70]. Obiectiv aici este elementul legic, conceptual, judicabil, care se lasă exprimat în cuvinte[71]. Ceea ce este pur intuitiv nu este comunicabil. Spre a clarifica acest punct, să ne imaginăm două fiinţe raţionale care pot intui numai proprietăţile şi relaţiile proiective: situarea a trei puncte pe o dreaptă, a patru puncte într-un plan şi aşa mai departe; ceea ce uneia îi apare ca punct poate să-i apară alteia drept plan, şi viceversa. Ceea ce pentru una dintre fiinţe este linia care uneşte două puncte, poate fi pentru cealaltă linia după care se intersectează două plane, şi aşa mai departe, potrivit aceleiaşi corespondenţe duale. În aceste condiţii, cele două fiinţe raţionale s-ar putea înţelege foarte bine între ele, fără a deveni vreodată conştiente de deosebirea dintre intuiţiile lor, întrucît în geometria proiectivă orice teoremă are duala sa; divergenţele de evaluare estetică[72] nu ar constitui un indiciu cert. În privinţa tuturor teoremelor geometrice, cele două fiinţe raţionale s-ar găsi în deplin acord, numai

că fiecare ar traduce altfel cuvintele în intuiţii proprii. Cuvîntului „punct", de exemplu, una din fiinţe i-ar asocia o intuiţie, iar cealaltă o altă intuiţie. Aşadar, putem susţine mai departe că pentru cele două fiinţe raţionale acest cuvînt semnifică ceva obiectiv, numai că nu este permis să înţelegem prin această semnificaţie elementul specific al intuiţiilor lor. Iar în acest sens axa Pămîntului este de asemenea obiectivă[73].

De obicei, „alb" ne face să ne gîndim la o anumită senzaţie care, natural, este întru totul subiectivă; dar, după părerea mea, în însăşi vorbirea obişnuită se manifestă adesea un sens obiectiv. Spunînd că zăpada este albă, avem intenţia să exprimăm o însuşire obiectivă pe care o constatăm la lumina obişnuită a zilei prin intermediul unei anumite senzaţii. Dacă asupra zăpezii cade o lumină colorată, în procesul judecării vom lua în consideraţie acest fapt. Vom spune, bunăoară: zăpada a p a r e acum roşie, dar ea e s t e albă. Pînă şi daltonistul poate vorbi despre roşu şi verde, cu toate că în senzaţiile sale el nu distinge aceste culori. El ajunge să recunoască distincţia datorită faptului că alţii o fac sau, eventual, pe baza unui experiment fizic. Aşadar, adesea nici termenii pentru culori nu desemnează senzaţia noastră subiectivă, despre care nu putem şti dacă concordă cu senzaţia altcuiva — este evident, într-adevăr, că folosirea unei aceleiaşi denumiri nu oferă nici o garanţie în acest sens —, ci desemnează o însuşire obiectivă. Înţeleg deci prin obiectivitate o independenţă faţă de senzaţia, intuiţia şi imaginaţia noastră, o independenţă faţă de formarea unor imagini lăuntrice pe baza rememorării senzaţiilor anterioare, dar nu o independenţă faţă de raţiune; într-adevăr, a răspunde la întrebarea ce sînt lucrurile independent de raţiune ar însemna să judecăm fără a judeca, să spălăm un lucru fără să-l udăm[74].

§ 27. Din acest motiv, nu mă pot declara de acord nici cu Schloemilch*[75] care afirmă că numărul este re-

* *Handbuch der algebraïschen Analysis*, p. 1.

prezentarea poziţiei unui obiect înăuntrul unui şir*. Dacă numărul ar fi o reprezentare, atunci aritmetica ar fi psihologie. Dar ea este tot atît de puţin psihologie pe cît este astronomia! La fel cum aceasta din urmă nu studiază reprezentările planetelor, ci înseşi aceste planete, tot astfel nici obiectul aritmeticii nu este o reprezentare. Dacă numărul doi ar fi o reprezentare, ar fi mai intîi numai propria mea reprezentare. Reprezentarea pe care o are altcineva este deja, luată ca atare, o altă reprezentare. Am putea avea atunci milioane întregi de numere doi. Ar trebui să spunem: doi al meu, doi al tău, un număr doi, toate numerele doi. Dacă acceptăm reprezentări latente sau inconştiente, am avea de asemenea numere doi inconştiente care ulterior ar redeveni conştiente. Pe măsura apariţiei unor noi adulţi ar apare mereu alţi doi, şi cine ştie dacă de-a lungul mileniilor aceştia nu s-ar schimba pînă acolo încît doi ori doi să facă cinci! Dar, în pofida acestui fapt, ar fi îndoielnic să existe, aşa cum se consideră

---

* Împotriva acestei afirmaţii se mai poate obiecta că, dacă este aşa, ar trebui întotdeauna să avem una şi aceeaşi reprezentare asupra poziţiei ori de cîte ori intervine unul şi acelaşi număr, ceea ce este evident fals. Dacă autorul ar fi vrut să înţeleagă prin reprezentare o idee obiectivă, atunci consideraţiile mele de mai jos ar fi fost lipsite de obiect; dar în acel caz ce deosebire ar mai exista între reprezentarea unei poziţii şi poziţia însăşi?

Reprezentarea în sens subiectiv ascultă de legile psihologice ale asociaţiei; ea are o natură senzorială, imagistică. Reprezentarea în sens obiectiv aparţine logicii şi este în esenţă nesenzorială, deşi cuvîntul care desemnează o reprezentare obiectivă poartă adesea cu sine şi o reprezentare subiectivă, care nu constituie însă semnificaţia sa[76]. Adesea, reprezentarea subiectivă diferă, după cum se poate dovedi, de la un om la altul, pe cînd cea obiectivă este aceeaşi pentru toţi. Reprezentările obiective se pot împărţi în obiecte şi concepte. Pentru a evita orice confuzie, voi folosi cuvîntul „reprezentare" numai în sensul subiectiv. Asociind acestui cuvînt ambele semnificaţii, Kant a conferit doctrinei sale o coloratură eminamente subiectivă, idealistă, îngreunînd astfel descifrarea adevăratei sale opinii. Distincţia trasată aici este tot atît de întemeiată ca şi aceea dintre logică şi psihologie. Ar fi de dorit ca acestea să fie întotdeauna separate cît se poate de riguros!

de obicei, infinit de multe numere. Poate că în acest caz 10^{10} va fi fiind un semn gol, nici o ființă neavînd vreo reprezentare corespunzătoare acestui nume.

Iată deci la ce rezultate bizare ajungem dacă explicităm cît de cît ideea că numărul ar fi o reprezentare. Ajungem la concluzia că numărul nu este nici spațial, nici fizic, în genul grămezilor de pietricele și turte dulci ale lui Mill, după cum nu este subiectiv ca reprezentările, ci este nesenzorial și obiectiv. Temeiul obiectivității nu poate să rezide în impresia senzorială care, ca afect al cugetului nostru, este integral subiectiv, ci, atîta cît pot vedea eu, rezidă numai în rațiune.

Ar fi uimitor ca cea mai exactă dintre toate științele să se sprijine pe o psihologie care își mai dibuie încă drumul.

Numărul ca mulțime

§ 28. Anumiți autori definesc numărul ca pe o mulțime, multitudine sau pluralitate. Unul din viciile acestei concepții constă în faptul că numerele 0 și 1 sînt excluse din sfera conceptului de număr[77]. Expresiile de mai sus sînt extrem de vagi: uneori, ele au o semnificație apropiată de cea a termenilor „grămadă", „grup", „agregat" — care sugerează o alăturare în spațiu — alteori ele sînt utilizate în aproape aceeași accepție ca și „număr", însă într-un mod mai imprecis. De aceea, o analiză a conceptului de număr nu este de găsit într-o definiție de acest gen. Formarea numărului pretinde — după Thomae*[78] — ca mulțimilor diferite de obiecte să li se confere denumiri diferite. Prin aceasta se are în vedere, evident, o determinare mai precisă a acelor mulțimi de obiecte, determinare pentru care conferirea denumirilor constituie numai un semn exterior. Problema constă însă în a ști ce fel de determinare intră în joc. Este evident că ideea de număr nu ar apare dacă în loc de „3 stele" „3 degete",

* *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 1.

„7 stele“ am vrea să introducem denumiri în care nu s-ar putea detecta părți componente comune. Chestiunea nu este de a da în genere nume, ci de a desemna ca atare ceea ce ține aici de număr. Dar pentru aceasta se cere ca ceea ce ține de număr să fie recunoscut în specificitatea sa.

Totodată, trebuie să avem în vedere următoarea deosebire. Unii numesc număr o mulțime de lucruri sau obiecte; alții, printre care și Euclid* îl definesc ca o mulțime de unități. Această din urmă expresie reclamă o discuție separată.

III. Opinii privitoare la unitate și unu[80]

Exprimă numeralul „unu“ o proprietate a obiectelor?

§ 29. În definițiile pe care Euclid le dă la începutul Cărții a VII-a a *Elementelor*, el pare să desemneze prin cuvîntul „ μονάς “ cînd un obiect ce trebuie numărat, cînd o proprietate a unui asemenea obiect, cînd numărul unu. Îl putem traduce peste tot prin „unitate“, dar numai pentru că însuși acest cuvînt evocă toate aceste accepții variate[81].

Schröder** spune: „Fiecare din lucrurile ce trebuie numărate se va numi unitate“. Se pune întrebarea de ce mai întîi aducem lucrurile sub conceptul unității și nu introducem pur și simplu definiția: „numărul este o mulțime de lucruri“, ceea ce ne-ar readuce iarăși la concepția de mai sus. În primul rînd, s-ar putea ca, acordînd lucrurilor denumirea de unități, să vrem a le determina mai exact, întrucît îl privim pe „unu“, potrivit formei sale lingvistice, ca pe un adjectiv, înțelegînd astfel „un oraș“ în același fel ca „om înțelept“[82]. În acest caz, o unitate ar fi un obiect căruia îi revine proprietatea „unu“ și ea s-ar

* Cartea a VII-a a *Elementelor*, începutul: μονάς ἐστι, καθ' ἥν ἕκαστον τῶν ὄντων ἕν λέγεται. 'Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος[79].

** *Op. cit.*, p. 5.

raporta la „unu" la fel cum se raportează „un înțelept" la adjectivul „înțelept". Considerațiilor care au fost aduse mai sus împotriva ideii că numărul ar fi o proprietate a lucrurilor li se mai adaugă aici cîteva argumente speciale. *În primul rînd*, ar fi surprinzător faptul că fiecare lucru în parte ar trebui să posede această proprietate. Ar fi de neînțeles de ce atunci în genere mai atribuim în mod expres vreunui lucru această proprietate. Aserțiunea că Solon este înțelept capătă un sens numai pentru că este posibil ca ceva să nu fie înțelept. Comprehensiunea unui concept descrește atunci cînd extensiunea sa crește; atunci cînd extensiunea devine atotcuprinzătoare, comprehensiunea se subțiază pînă la dispariție[83]. Este greu de crezut că limba ar ajunge să făurească un adjectiv ce nu ar contribui cu nimic la definirea mai precisă a unui obiect[84].

Dacă „un om" ar putea fi interpretat în același mod ca „om înțelept", ar trebui să admitem că „unu" poate fi aplicat și în calitate de predicat, astfel încît să putem spune „Solon a fost unul" la fel cum putem spune „Solon a fost înțelept". Dar, deși pe prima dintre aceste două expresii o putem întîlni într-adevăr, luată în sine ea nu este inteligibilă. Ea poate să însemne, de exemplu: „Solon a fost unul dintre înțelepți", atunci cînd putem completa cu „dintre înțelepți" expresia citată, pe baza contextului în care ea apare. Dar, după toate aparențele, cînd este luat în mod izolat „unu" nu poate fi predicat*. În cazul pluralului aceasta iese și mai clar în evidență. În timp ce „Solon a fost înțelept" și „Tales a fost înțelept" se pot concentra în „Solon și Tales au fost înțelepți", nu putem spune „Solon și Tales au fost unu". Dar această imposibilitate nu s-ar putea întrevedea pe baza concepției discu-

* În anumite expresii, „unu" este utilizat în accepții care par să o contrazică pe cea de mai sus, dar o analiză mai amănunțită ne permite să constatăm că un termen conceptual necesită o întregire, sau că „unu" nu este folosit ca numeral, că ceea ce se intenționează a se aserta nu este unicitatea, ci însușirea de a *fi* unitar.

tate, de vreme ce „unu" ar fi, în aceeaşi măsură ca şi „înţelept", o proprietate atît a lui Solon cît şi a lui Tales.

§ 30. În aceeaşi ordine de idei se poate observa că nimeni nu a fost în măsură să dea o definiţie a proprietăţii „unu". Atunci cînd Leibniz* spune: „Este unu ceea ce noi concepem printr-un act al intelectului", el defineşte „unu" în mod circular. Şi oare nu am putea concepe şi multiplul printr-un singur act al intelectului? Leibniz admite aceasta în cadrul aceluiaşi pasaj. La fel, Baumann** spune că „este unu ceea ce noi concepem ca unu", şi continuă: „Ceea ce luăm ca punct sau nu admitem a fi mai departe divizat este privit de noi în calitate de unu; însă pe orice unu al intuiţiei exterioare, atît al celei pure cît şi al celei empirice, îl putem privi şi ca pe o multiplicitate. Orice reprezentare este una, dacă o delimităm în raport cu o altă reprezentare, însă cînd este luată în sine înăuntrul ei putem distinge de asemenea o multiplicitate". În felul acesta, orice delimitare intrinsecă a conceptului dispare şi totul este făcut să depindă de modul nostru de a vedea lucrurile[85]. Întrebăm încă o dată: ce sens poate avea atribuirea proprietăţii „unu" unui obiect oarecare, de vreme ce, potrivit modului nostru de a vedea lucrurile, fiecare obiect poate să fie şi poate să nu fie unu? Cum este cu putinţă ca o ştiinţă care îşi revendică faima tocmai de la claritatea şi precizia ei maximă să se sprijine pe un concept atît de confuz?

§ 31. Or, deşi Baumann*** întemeiază conceptul de unu pe intuiţia interioară, el specifică totuşi — în pasajul citat mai sus — indivizibilitatea şi delimitarea ca note ale conceptului în cauză. Dacă aceste note ar conveni într-adevăr conceptului, ar trebui să ne aşteptăm ca pînă şi animalele să poată avea o anumită idee asupra unităţii. E oare cu putinţă ca un cîine care priveşte spre Lună să aibă o idee, oricît de indistinctă, despre ceea ce noi semnificăm prin

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 2; ed. Erdmann, p. 8.
** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.
*** *Ibidem.*

cuvîntul „unu“? E greu de admis! Şi totuşi, nu încape îndoială că el distinge obiecte individuale: alt cîine, stăpînul său, piatra cu care se joacă, îi apar tot atît de delimitate, de subzistente în sine, de indivizate precum ne apar şi nouă. Negreşit, el va sesiza o deosebire între a trebui să se apere împotriva mai multor cîini şi a trebui să se apere împotriva unuia singur, dar în cazul de faţă avem ceea ce Mill numeşte diferenţa fizică. Problema care se ridică în mod deosebit aici este dacă un cîine e conştient, fie cel puţin într-un mod foarte confuz, de elementul comun, exprimat de noi prin cuvîntul „unu“, al situaţiilor în care, bunăoară, este muşcat de un cîine mai mare şi, respectiv, fugăreşte el o pisică. După mine, aceasta este improbabil. De aceea, trag concluzia că ideea unităţii, spre deosebire de ceea ce crede Locke*, nu este sugerată intelectului de orice obiect din afara noastră şi de orice idee dinăuntrul nostru[86], ci ea ajunge să fie cunoscută de noi prin mijlocirea facultăţilor intelectuale superioare care ne deosebesc pe noi de animale. Ca atare, individualitatea, delimitarea şi alte proprietăţi ale lucrurilor pe care animalele le percep tot atît de bine ca şi noi nu pot constitui elementul esenţial al conceptului nostru.

§ 32. Şi totuşi, o anumită conexiune poate fi întrevăzută. Ea este indicată de limbă, atunci cînd din „unu“ ea derivă „unitar“, „unit“. Un lucru este cu atît mai apt de a fi privit ca un obiect distinct, cu cît trăsăturile sale distinctive ies mai mult în relief în raport cu trăsăturile distinctive ale mediului ambiant şi cu cît coeziunea sa interioară precumpăneşte asupra conexiunii sale cu mediul ambiant. „Unitar“ semnifică deci o proprietate ce ne permite să detaşăm lucrul pe care îl gîndim de mediul său ambiant şi să-l considerăm ca ceva în sine. Aşa se şi explică de ce cuvîntul francez „uni“ ajunge să însemne „uniform“, „continuu“. La rîndul său, cuvîntul „unitate“ este întrebuinţat într-un mod asemănător, atunci cînd vorbim despre unitatea politică a unei ţări, despre unitatea

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 409.

unei opere de artă*. Dar, în acest sens, „unitate" ţine mai puţin de „unu" decît de „unit" sau „unitar". Într-adevăr, atunci cînd spunem că Pămîntul are *un* satelit, intenţia noastră nu este să arătăm că acesta este un satelit delimitat, subzistent în mod autonom, indivizat, ci să marcăm contrastul cu ceea ce se întîmplă în cazurile lui Venus, Marte sau Iupiter. Sub raportul delimitării şi indivizibilităţii, sateliţii lui Iupiter sînt pe deplin comparabili cu cel al nostru, ei fiind, în acest sens, tot atît de unitari.

§ 33. Unii autori ridică indivizarea la rang de indivizibilitate. G. Köpp** numeşte individ orice lucru cunoscut prin simţuri ori într-un alt mod şi care este gîndit ca indecompozabil şi ca subzistent prin sine însuşi, iar apoi, pe indivizii care trebuie număraţi, îi numeşte unuuri; în mod evident, „unu" este luat aici în sensul de unitate. Baumann îşi justifică părerea sa că lucrurile exterioare nu ar reprezenta unităţi stricte, prin considerentul că avem libertatea de a le privi ca multitudini, drept care el prezintă şi indecompozabilitatea ca un criteriu al unităţii stricte. Ridicarea coeziunii interne la rangul de absolut urmăreşte, evident, dobîndirea unui criteriu al unităţii care să nu mai depindă de un mod sau altul de a înţelege lucrurile. Tentativa eşuează datorită faptului că în acest caz nu ne mai rămîne aproape nimic ce ar mai putea fi numit unitate şi numărat. De aceea, ne vedem siliţi să batem imediat în retragere, adoptînd ca criteriu nu indecompozabilitatea însăşi, ci numai faptul de a fi gîndit ca indecompozabil. Însă atunci ajungem din nou la concepţia ezitantă de mai sus. Dar dacă gîndim lucrurile altfel decît sînt ele în realitate, dobîndim cel puţin vreun avantaj? Nicidecum! Dintr-o ipoteză falsă pot decurge concluzii false. Dar dacă din indecompozabilitate nu vrem a infera vreo concluzie, în ce mai poate consta utilitatea

* Cu privire la istoricul cuvîntului „unitate", a se vedea EUCKEN, *Geschichte der philosophischen Terminologie*, pp. 122—123, 136, 220.

** *Schularithmetik*, pp. 5—6, Eisenach, 1867.

ei? Dacă putem să renunțăm și chiar trebuie să renunțăm fără prejudicii la rigoarea conceptului avut în vedere, pentru ce am mai căutat această rigoare? Dar poate că nu ni se cere altceva decît să nu gîndim această decompozabilitate. Ca și cum lipsa de gîndire ne-ar face să cîștigăm ceva![87] Există însă cazuri cînd nu mai putem evita în nici un chip să gîndim decompozabilitatea, atunci cînd raționamentul se sprijină pe însuși caracterul compus al unității. Fie, de exemplu, problema: dacă o zi are 24 de ore, cîte ore sînt în 3 zile?

Sînt oare identice unitățile?

§ 34. Așadar, orice tentativă de a defini proprietatea „unu“ eșuează, încît ne vedem obligați să renunțăm la a vedea în desemnarea lucrurilor ca unități o determinare mai lămuritoare. Ne reîntoarcem iarăși la întrebarea noastră: de ce mai spunem că lucrurile sînt unități, de vreme ce „unitate“ ar fi numai un alt nume pentru „lucru“, de vreme ce toate lucrurile sînt unități sau pot fi concepute ca atare?[88]. E. Schröder* vede explicația în identitatea care este prescrisă obiectelor supuse numărării. — Dar, în primul rînd e de neînțeles de ce cuvintele „lucru“ și „obiect“ nu ar putea să indice aceasta la fel de bine. Mai departe se pune întrebarea: de ce atribuim obiectelor numărării însușirea de a fi identice? Această identitate li se atribuie numai, sau ele sînt realmente identice? În orice caz, două obiecte *nu* sînt n i c i o d a t ă absolut identice. Pe de altă parte, aproape întotdeauna putem găsi, desigur, un criteriu potrivit căruia două obiecte oarecare concordă între ele[89]. Dar astfel am ajuns din nou la modul arbitrar de a concepe lucrurile, în cazul cînd, păcătuind împotriva adevărului, nu vrem să atribuim lucrurilor o identitate mai largă decît aceea care le revine în mod real. Și, într-adevăr, mai mulți autori pretind că unitățile sînt identice, fără nici o limitare. Hobbes**

* *Op. cit.*, p. 5.
** BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 242.

afirmă că „numărul în sensul absolut presupune în matematică unităţi identice între ele, din care este alcătuit“[90]. Hume* consideră părţile componente ale cantităţii şi numărului ca absolut similare[91]. Thomae** numeşte unitate un indivîd al mulţimii şi adaugă: „unităţile sînt identice între ele“. Cu egal sau chiar cu mai mult temei s-ar putea spune: indivizii mulţimii sînt distincţi. Ce poate însemna însă pentru număr această pretinsă identitate? Proprietăţile prin care lucrurile se disting între ele sînt indiferente şi irelevante în ceea ce priveşte numărul acestora, şi tocmai de aceea vrem să le ţinem de o parte. Numai că, în maniera sus-menţionată, nu putem reuşi. Dacă, aşa cum pretinde Thomae, „se face abstracţie de particularităţile indivizilor unei mulţimi de obiecte“, „ori de cîte ori se consideră lucruri separate, se trec cu vederea caracteristicile prin care lucrurile se diferenţiază între ele“, atunci — în pofida părerii lui Lipschitz — ceea ce ne rămîne nu este „conceptul de număr al lucrurilor considerate“, ci un concept general căruia i se subsumează acele lucruri[92]. Lucrurile înseşi nu pierd prin aceasta nici una din trăsăturile lor specifice. Dacă, de exemplu, eu fac abstracţie de proprietăţile prin care o pisică albă şi o pisică neagră se deosebesc între ele, obţin, probabil, conceptul „pisică“. Dacă le strîng acum pe amîndouă sub acest concept şi le numesc, să spunem, unităţi, pisica albă rămîne tot albă iar cea neagră tot neagră. Chiar dacă nu mă gîndesc la culorile lor sau nu-mi propun să trag vreo concluzie pe baza acestei deosebiri a lor, pisicile nu devin incolore, ci rămîn la fel de distincte ca înainte. Ce-i drept, conceptul „pisică“ la care s-a ajuns prin abstracţie nu mai conţine particularităţile, însă tocmai de aceea el este numai unul[93].

§ 35. Lucruri diferite nu pot fi făcute identice prin intermediul unor metode pur conceptuale; dar dacă aceasta ar fi posibil, atunci nu am mai avea o pluralitate de lu-

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 568.
** *Op. cit.*, p. 1.

cruri, ci un lucru şi numai unul. Într-adevăr, aşa cum spune Descartes*, numărul — sau mai curînd pluralitatea — lucrurilor provine din diversitatea lor[94]. E. Schröder** afirmă pe drept cuvînt: „Cererea de a număra lucrurile poate fi emisă în mod raţional numai acolo unde obiectele în cauză apar in mod clar ca distincte, de exemplu ca separate în spaţiu şi timp şi delimitate totodată între ele". Într-adevăr, de multe ori asemănarea prea mare a obiectelor, de exemplu a şipcilor unui gard, îngreunează numărătoarea. Deosebit de pregnante în acest sens sînt afirmaţiile lui W. Stanley Jevons***: „Numărul nu este decît un alt nume pentru *diversitate*. Identitatea exactă este unitate, iar odată cu diferenţa apare pluralitatea". Şi mai departe (la p. 157): „S-a afirmat adesea că unităţile sînt unităţi prin faptul că sînt perfect similare între ele; dar, deşi în anumite privinţe pot fi perfect asemănătoare, ele trebuie să se deosebească cel puţin într-un punct, altfel ar fi incapabile de pluralitate. Dacă trei monede ar fi într-atîta de asemănătoare încît să ocupe acelaşi loc în acelaşi timp, ele nu ar mai fi trei monede, ci una".

§ 36. Dar, aşa cum se constată imediat, concepţia după care unităţile sînt diferite se ciocneşte de dificultăţi noi. Jevons explică: „O unitate este un obiect oarecare al gîndirii care poate fi distins de orice alt obiect tratat ca unitate în cursul aceleiaşi probleme. Aici unitatea este definită prin intermediul ei însăşi iar precizarea „care poate fi distins de orice alt obiect" nu cuprinde o specificare mai adecvată, deoarece este subînţeleasă. Despre un obiect spunem că este un altul, tocmai şi numai pentru că îl putem deosebi de alte obiecte. În continuare, Jevons**** spune: „Ori de cîte ori utilizez simbolul 5, eu înţeleg de fapt

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 103.
** *Op. cit.*, p. 3.
*** *The Principles of Science*, 3d. ed. p. 156.
**** *Op. cit.*, p. 162.

şi este perfect clar că fiecare dintre aceste unităţi este distinctă de oricare alta. Dacă ar fi de dorit, le-aş putea nota astfel:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

În mod cert, notarea lor diferită este de dorit, odată ce sînt diferite; altfel s-ar crea o mare confuzie. Dacă însăşi poziţia deosebită în care apare 1 ar trebui să semnifice o deosebire, ar trebui stipulată în acest sens o regulă ce nu admite excepţii, întrucît în caz contrar nu am şti niciodată dacă 1+1 trebuie să însemne 2 sau 1. Dar atunci ar trebui să respingem egalitatea 1=1 şi ne-am găsi puşi în situaţia dificilă de a nu putea nota vreodată acelaşi lucru pentru a doua oară. Evident, această situaţie e inacceptabilă. Dacă însă vrem să atribuim semne distincte unor lucruri distincte este greu de văzut pentru ce mai păstrăm o parte componentă comună a acestor semne şi de ce, în loc de a scrie

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''',$$

nu scriem mai curînd

$$a + b + c + d + e.$$

Într-adevăr, identitatea am pierdut-o oricum, iar indicarea unei anumite asemănări nu serveşte la nimic. În felul acesta, unu ne scapă din mîini; ne rămîn obiectele cu toate particularităţile lor. Simbolurile

$$1',\ 1'',\ 1'''$$

sînt o expresie grăitoare a perplexităţii noastre: ne trebuie identitatea, drept care avem notaţia 1; ne trebuie diferenţa — drept care avem notaţia cu indici dar care, din păcate, anulează identitatea.

§ 37. Aceeaşi dificultate o întîlnim şi la alţi autori. Locke* spune: „Repetînd ... ideea unităţii şi unind-o cu altă unitate, ne formăm despre ea o idee colectivă de-

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, pp. 409—411.

semnată prin cuvîntul «doi». Și acel ce poate să facă acest lucru și să înainteze, adăugînd mereu cîte o unitate la ultima idee colectivă pe care a avut-o despre un anumit număr și dîndu-i o denumire, acela poate să calculeze..."[94a]. Leibniz* definește numărul ca 1 și cu 1 și cu 1, sau ca unități. Hesse** scrie: „Dacă cineva își poate forma vreo idee despre unitatea care în algebră se exprimă prin simbolul 1..., el poate să conceapă și o a doua unitate la fel de justificată ca prima, iar apoi și alte unități de același gen. Reunirea celei de-a doua cu prima într-un singur tot dă numărul 2".

În aceste afirmații trebuie reținută relația în care se află semnificațiile cuvintelor „unitate" și „unu". Prin unitate, Leibniz înțelege un concept sub care cad acest unu și acest unu și acest unu, sau, așa cum mai spunea el: „Abstrasul din unu este unitatea". Locke și Hesse par să folosească unitate și unu în una și aceeași accepție. În ultimă instanță Leibniz procedează la fel; într-adevăr, întrucît el numește *unum* pe fiecare dintre obiectele individuale care cad sub conceptul unității, acest cuvînt desemnează la el nu obiectul individual, ci conceptul sub care cad toate obiectele individuale.

§ 38. Pentru a evita orice confuzie, va fi indicat totuși să distingem în mod strict între unitate și unu. Noi folosim expresia „numărul unu" și indicăm prin intermediul articolului hotărît un obiect individual determinat al investigației științifice[95]. Nu există numere unu diferite, există unul singur. În 1 avem un nume propriu care în această calitate este tot atît de puțin susceptibil să primească pluralul ca „Friedrich cel Mare" sau „elementul chimic aur". Faptul că scriem 1 fără liniuțe care să marcheze diferențele nu este o simplă întîmplare, iar notația nu este inexactă. St. Jevons ar scrie egalitatea

$$3 - 2 = 1$$

* *Ibidem*, vol. II, p. 3.
** *Vier Species*, p. 2.

sub o formă ca:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

Ce rezultat ar avea însă

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')?$$

În nici un caz, nu 1'. De aici urmează că, potrivit concepţiei sale, ar exista nu numai unu diferiţi, ci şi doi diferiţi etc.; într-adevăr, $1'' + 1'''$ nu ar putea fi reprezentaţi prin $1'''' + 1'''''$. De aici rezultă cît se poate de clar că numărul nu este un conglomerat de lucruri. Aritmetica ar înceta să existe dacă în locul numărului unu, care este întotdeauna acelaşi, am vrea să introducem lucruri distincte, oricît de asemănătoare ar fi simbolurile acestora; ele nu ar putea fi făcute identice fără a se comite o eroare. Or, nu putem admite că tot ce aritmetica are mai profund este o notaţie eronată. Ca atare, este imposibil să-l privim pe 1 ca pe semnul unor obiecte diferite, ca semn pentru Islanda, Aldebaran, Solon şi altele. Absurditatea capătă o pregnanţă maximă dacă vom considera cazul unei ecuaţii care admite trei rădăcini şi anume 2, 5 şi 4. Dacă, urmîndu-l pe Jevons, vom scrie pentru 3

$$1' + 1'' + 1''',$$

şi dacă prin 1', 1'', 1''' înţelegem unităţi şi deci înţelegem prin ele, conform lui Jevons, obiectele considerate aici, atunci 1' va semnifica aici 2, 1'' va semnifica 5 iar 1''' va semnifica 4. Dar atunci nu ar fi mai inteligibil ca în locul lui $1' + 1'' + 1'''$ să scriem

$$2 + 5 + 4?$$

Numai numele conceptuale pot avea plural[96]. Aşadar, atunci cînd vorbim despre „unităţi", acest cuvînt nu poate fi luat în accepţia numelui propriu „unu", ci numai în calitate de nume comun. Dacă „unitate" înseamnă „obiect de numărat", nu putem defini numărul ca unităţi. Dacă prin „unitate" se înţelege un concept care cuprinde în sine numărul unu şi numai pe acesta, plura-

lul nu are nici un sens şi încă o dată devine imposibil să definim numărul, împreună cu Leibniz, ca unităţi sau ca 1 şi 1 şi 1. Într-adevăr, dacă folosim „şi" ca în „Bunsen şi Kirchhof", atunci 1 şi 1 şi 1 nu este 3, ci 1, la fel cum aur şi aur şi aur nu poate fi vreodată altceva decît aur. Semnul plus din

$$1 + 1 + 1 = 3$$

trebuie deci să fie interpretat altfel decît acel „şi", care contribuie la desemnarea unei colecţii, a unei „idei colective"[97].

§ 39. Ne găsim astfel în faţa următoarei dificultăţi: Dacă vrem să generăm numărul prin cuprinderea laolaltă a unor obiecte distincte, ceea ce obţinem este o multitudine în care obiectele sînt conţinute cu tocmai acele proprietăţi ale lor prin care se deosebesc între ele, iar aceasta nu este numărul. Dacă, pe de altă parte, încercăm să formăm numărul prin cuprinderea laolaltă a identicilor, rezultatul trece întotdeauna în unu şi nu ajungem niciodată la o pluralitate.

Dacă prin 1 desemnăm fiecare din obiectele de numărat, comitem o eroare, întrucît unor lucruri distincte li se atribuie unul şi acelaşi semn. Iar dacă îl înzestrăm pe 1 cu liniuţe distinctive, atunci el nu mai este aplicabil în aritmetică.

Cuvîntul „unitate" are darul de a camufla dificultatea; tocmai acesta este motivul — ce-i drept, inconştient — pentru care el este preferat în comparaţie cu cuvintele „obiect" şi „lucru"[98]. Noi începem prin a spune că lucrurile de numărat sînt unităţi, acordînd astfel diversităţii ceea ce i se cuvine; după aceea, cuprinderea laolaltă, colectarea, adunarea, reunirea, adăugarea, sau cum mai vrem să-i spunem, trece în conceptul adunării aritmetice, iar termenul general „unitate" se transformă pe nesimţite în numele propriu „unu". În felul acesta se ajunge la identitate. Dacă la litera „ş" adaug litera „i", oricine va constata cu uşurinţă că ceea ce obţin nu este numărul 2. Dacă însă subsumez *ş* şi *i* conceptului „unitate"

şi în loc de „*ş* şi *i*" spun: „o unitate şi încă o unitate" sau „1 şi cu 1", sîntem gata să credem că am obţinut astfel numărul 2. Această dificultate este atît de bine camuflată de cuvîntul „unitate", încît, negreşit, puţini ajung măcar să o bănuiască.

Aici Mill ar fi putut denunţa in mod justificat o manipulare artificioasă a limbajului; într-adevăr, avem aici nu manifestarea exterioară a unui proces de gîndire, ci numai răsfrîngerea iluzorie a acestuia. Aici căpătăm efectiv impresia că unor cuvinte goale de orice gînd li se atribuie o anumită forţă misterioasă, întrucît distinctul, prin simplul fapt că i se spune unitate, este obligat să ajungă identic[99].

Încercări de a înlătura dificultatea

§ 40. Să examinăm acum unele idei care reprezintă încercări de depăşire a acestei dificultăţi, chiar dacă nu întotdeauna ele au fost întreprinse cu o conştiinţă pe deplin clară în această intenţie.

În primul rînd, se poate face apel la o anumită proprietate a spaţiului şi timpului. Un punct al spaţiului nu poate fi distins de un altul, atîta timp cît îl considerăm numai în sine, şi acelaşi este cazul liniilor drepte, planelor, sau cazul corpurilor, ariilor şi segmentelor congruente; toate aceste entităţi de un acelaşi gen pot fi distinse între ele numai ca existente în cadrul unui ansamblu, numai ca părţi componente ale unei intuiţii totale. Se pare deci că aici identitatea se combină cu discernabilitatea. În cazul timpului, situaţia este similară. Poate că tocmai de aceea Hobbes* consideră că identitatea unităţilor nu poate fi concepută altfel decît ca generată prin divizarea continuului[100]. La rîndul său, Thomae** spune: „Dacă ne reprezentăm o mulţime de indivizi sau de unităţi în spaţiu şi le numărăm în mod succesiv, ceea ce reclamă timp,

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 242.
** *Elementare Theorie der analyt. Functionen*, p. 1.

încă mai rămîne ca o notă distinctivă a unităţilor — oricît am abstrage — poziţia lor diferită în spaţiu şi succesiunea lor diferită în timp".

Împotriva unei asemenea concepţii se ridică în primul rînd obiecţia că, dacă ar fi aşa, atunci numai ceea ce este spaţial şi temporal ar fi numărabil. Încă Leibniz* a respins ideea scolasticilor după care numărul ar apărea prin simpla divizare a continuului şi nu ar putea fi aplicat la lucruri incorporale[101]. Baumann** relevă independenţa numărului faţă de timp. Conceptul de unitate poate fi gîndit, după acest autor, independent de timp. St. Jevons*** scrie: „Trei monede sînt trei monede, indiferent dacă le numărăm în mod succesiv sau le privim pe toate în mod simultan. În multe cazuri, nici spaţiul, nici timpul nu sînt temeiul diferenţei, numai calitatea pură intrînd în joc. Putem distinge, de exemplu, greutatea, inerţia şi duritatea aurului ca trei însuşiri, deşi nici una dintre acestea nu este înaintea alteia sau după alta, nu este în spaţiu sau in timp. Orice mijloc de discriminare poate fi o sursă a pluralităţii". — Aş adăuga că dacă obiectele numărate nu se succed în realitate, ci sînt numai numărate în mod consecutiv, timpul nu poate fi temeiul discriminării. Într-adevăr, pentru ca să poată fi numărate în mod consecutiv, trebuie să dispunem deja de anumite note distinctive. Timpul nu este decît o exigenţă psihologică a numărării, dar el nu are de-a face cu conceptul de număr[102]. Reprezentînd obiecte nespaţiale şi atemporale prin puncte spaţiale sau temporale, putem facilita eventual demersul numărării; dar în principiu este presupusă astfel aplicabilitatea conceptului de număr la ceva ce nu este de ordin spaţial sau temporal[103].

§ 41. Mai departe însă, în ipoteza că trecem cu vederea toate notele distinctive, cu excepţia celor de ordin spaţial şi temporal, reuşim oare într-adevăr să unim discerna-

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 2.
** *Op. cit.*, vol. II, p. 668.
*** *The Principles of Science*, p. 157.

bilitatea şi identitatea? Cîtuşi de puţin! Nu ne-am apropiat nici măcar cu un pas de soluţie. Asemănarea mai mică sau mai mare a obiectelor nu contribuie cu nimic la rezolvarea problemei, de vreme ce pînă la urmă aceste obiecte trebuie să fie păstrate separate. Eu nu pot nota aici toate punctele individuale, liniile individuale etc. prin 1, tot aşa cum în consideraţiile de ordin geometric eu nu le pot nota pe toate împreună prin A; şi într-un caz, şi în celălalt se cere să le distingem între ele. Numai luate în sine, fără a ţine seama de relaţiile lor spaţiale, punctele spaţiului sînt identice între ele. Dacă însă trebuie să le gîndesc împreună, sînt obligat să le consider în cadrul existenţei lor spaţiale comune, pentru ca să nu se contopească iremediabil în unul. Luate împreună, unele puncte pot forma eventual o figură oarecare, de exemplu în formă de stea, sau pot să se ordoneze într-un fel sau altul pe o dreaptă, iar segmente egale puse cap la cap pot forma un segment unic, sau pot fi complet separate. Configuraţiile apărute în acest mod pot fi complet diferite, în timp ce numărul elementelor rămîne acelaşi. Dar atunci am avea şi aici diferite numere cinci, diferite numere şase ş.a.m.d. La fel, punctele timpului sînt separate prin intervale temporale scurte sau lungi, egale sau inegale. Toate acestea sînt relaţii care nu au absolut nimic de-a face cu numărul ca atare. În toate intervine un element special, deasupra căruia numărul în universalitatea lui se ridică cu mult. Pînă şi un moment individual are ceva cu totul specific prin care se diferenţiază, să spunem, de un punct al spaţiului şi din care nu mai rămîne nimic în cadrul conceptului de număr[104].

§ 42. Nici soluţia de a înlocui ordinea spaţială şi temporală printr-un concept mai general de şir nu-şi atinge ţelul propus; într-adevăr, poziţiile obiectelor în cadrul unui şir nu pot constitui temeiul distingerii lor, întrucît ele trebuie să fi fost în prealabil distinse într-un fel sau altul, ca să se poată ordona în şir. O atare aranjare presupune întotdeauna relaţii între obiecte, să spunem relaţii spaţiale, temporale, logice sau intervale de su-

nete, sau oricare altele; asemenea relaţii ne conduc de la un obiect la altul, ele fiind legate în mod necesar de distingerea obiectelor.

Atunci cînd Hankel* spune că un obiect poate fi gîndit sau instituit o dată, de două ori sau de trei ori, avem aici, după cum se pare, o nouă încercare de a combina discernabilitatea cu identitatea lucrurilor ce urmează a fi numărate. Dar se poate constata imediat că nici această încercare nu este mai reuşită; într-adevăr, reprezentările sau intuiţiile unuia şi aceluiaşi obiect trebuie să se diferenţieze între ele, într-un fel sau altul, pentru a nu se topi într-un unu. Totodată, cred că avem dreptul să vorbim despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obişnuit, ceea ce ar fi oarecum incomod[105].

§ 43. Probabil pentru a evita dificultăţile întîmpinate atunci cînd, odată cu St. Jevons, facem să se desemneze prin semnul 1 unul dintre obiectele numărate, E. Schröder vede în acest semn numai imaginea unui obiect. Rezultatul este că el explică numai semnul numărului, nu însuşi numărul. Într-adevăr, el spune**: „Pentru a căpăta un semn capabil să exprime c î t e dintre aceste unităţi*** sînt date, ne îndreptăm atenţia rînd pe rînd la cîte unul *de fiecare dată* şi îl reprezentăm printr-o linioară verticală: 1 (un u n u); aceşti unu îi înşirăm unul lîngă altul, legîndu-i însă prin semnul + (plus), căci în caz contrar 111, de exemplu, s-ar citi în notaţia uzuală a numerelor ca o sută unsprezece. Căpătăm astfel un semn ca:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

a cărui structură poate fi descrisă spunînd:

„Un număr natural este o sumă de mai mulţi unu“.

Reiese că pentru Schröder numărul este un s e m n.

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.
** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, p. 5 şi urm.
*** Obiecte ce urmează a fi numărate.

Ceea ce exprimă acest semn, adică ceea ce pînă acum eu am numit număr, Schröder presupune că este deja cunoscut, dovadă cuvintele „cîte dintre acele unităţi sînt date". Prin cuvîntul „unu", el înţelege, de asemenea, semnul 1, nu semnificaţia acestuia[106]. El foloseşte mai întîi semnul + numai ca pe un mijloc exterior de legare, lipsit de orice conţinut propriu; abia ulterior defineşte el adunarea. El ar fi putut spune mai succint: scriem unul lîngă altul tot atîtea semne 1 cîte obiecte de numărat avem şi le legăm prin semnul +. Zero s-ar exprima prin faptul că nu scriem nimic.

§ 44. Pentru a nu introduce înăuntrul numărului notele distinctive ale lucrurilor, St. Jevons* face următoarea precizare: „Acum va fi uşor să ne formăm o idee clară asupra naturii abstracţiei numerice. Ea constă în a abstrage caracterul diferenţei din care survine pluralitatea, reţinînd pur şi simplu faptul existenţei sale. Atunci cînd vorbesc despre t r e i o a m e n i nu sînt obligat să specific imediat notele prin care fiecare dintre aceştia poate fi distins de ceilalţi doi. Aceste note trebuie să existe, dacă ei sînt într-adevăr trei oameni şi nu unul şi acelaşi, iar atunci cînd mă refer la ei ca la mai mulţi eu presupun existenţa diferenţelor cerute. Numărul abstract este deci f o r m a v i d ă a d i f e r e n ţ e i".

Cum să înţelegem aceasta? Putem sau să facem abstracţie de proprietăţile distinctive ale lucrurilor, înainte de a le reuni într-un întreg, sau să formăm mai întîi un întreg şi să facem apoi abstracţie de natura diferenţelor. Aplicînd primul procedeu nu am mai ajunge deloc să distingem lucrurile şi ca atare nu am mai putea reţine nici faptul existenţei diferenţelor; Jevons pare să aibă în vedere al doilea procedeu. Eu nu cred însă că noi am putea ajunge în acest mod la numărul 10 000, întrucît nu sîntem în stare să cuprindem simultan atîtea diferenţe şi să reţinem totodată faptul existenţei lor; pe de

---

* *Op. cit.*, p. 158.

altă parte, dacă le-am gîndi rînd pe rînd, numărul nu ar mai ajunge să fie încheiat[107]. E adevărat că numărarea decurge în timp; dar în felul acesta noi nu obţinem numărul, ci doar îl determinăm. Şi, dealtfel, specificarea modalităţii de abstragere nu constituie o definiţie[108].

Ce trebuie să se înţeleagă prin „forma vidă a diferenţei"? Nu cumva o propoziţie ca

„a este diferit de b",

unde *a* şi *b* rămîn nedeterminate? Ar putea fi această propoziţie numărul 2, să spunem? Oare propoziţia

„Pămîntul are doi poli"

înseamnă acelaşi lucru ca

„Polul Nord este diferit de Polul Sud"?

Evident că nu. A doua propoziţie ar putea avea loc fără ca prima să aibă loc, şi viceversa[109]. În cazul numărului 1000 vom avea deci

$$\frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2}$$

de asemenea propoziţii ce exprimă o diferenţă.

Afirmaţia lui Jevons îşi vădeşte în mod deosebit inadecvarea în cazul lui 0 şi 1. De la ce vom face anume abstracţie spre a ajunge, bunăoară, de la Lună la numărul 1? Prin abstragere căpătăm, de bună seamă, conceptele: satelit al Pămîntului, satelit al unei planete, corp ceresc fără lumină proprie, corp ceresc, corp, obiect. Dar 1 nu poate fi găsit în acest şir, întrucît nu este un concept sub care ar putea să cadă Luna. În cazul lui 0 nici nu avem vreun obiect de la care procesul abstracţiei ar putea porni. Obiecţia după care 0 şi 1 nu sînt numere în acelaşi sens în care sînt 2 şi 3 nu-şi găseşte loc. Numărul răspunde la întrebarea *cîţi* şi dacă, de exemplu, întrebăm: Cîţi sateliţi are această planetă? putem aştepta în egală măsură răspunsul 0 sau 1, ori răspunsul 2 sau 3, sensul întrebării rămînînd acelaşi. Fără îndoială, numărul 0 comportă ceva

specific, şi tot astfel numărul 1, dar aceasta este valabil în principiu pentru orice număr întreg; singura deosebire este că în cazul numerelor tot mai mari specificul lor devine tot mai puţin evident. Ar fi cu totul arbitrar să facem din aceasta o deosebire esenţială. Ceea ce nu convine lui 0 sau 1 nu poate fi esenţial pentru conceptul de număr.

În sfîrşit, acceptînd acest mod de apariţie a numerelor nu înlăturăm nicidecum dificultatea de care ne-am ciocnit atunci cînd am considerat simbolizarea lui 5 prin

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

Acest simbolism concordă cu ceea ce spune Jevons despre abstracţia prin care formăm numerele; accentele indică tocmai faptul că există o diferenţă, fără a preciza însă natura ei. Dar simpla subzistenţă a diferenţei este suficientă deja — după cum am văzut — pentru a genera, după cum crede Jevons, diferiţi unu, diferiţi doi, diferiţi trei, ceea ce este incompatibil cu existenţa aritmeticii.

Soluţia dificultăţii

§ 45. Să aruncăm acum o privire asupra celor stabilite de noi pînă la acest punct şi asupra problemelor ce nu şi-au găsit încă răspuns.

Numărul nu este abstras din lucruri în modul in care sînt abstrase culoarea, greutatea şi soliditatea, după cum nu este nici o proprietate a lucrurilor în sensul în care acestea sînt proprietăţi. Dar atunci a mai rămas să se arate despre ce anume se enunţă ceva prin intermediul aserţiunii numerice[110].

Numărul nu este ceva fizic, dar nu este nici ceva subiectiv, nu este o reprezentare.

Numărul nu rezultă din adăugarea unui lucru la un lucru. Nici conferirea unei denumiri după fiecare adăugare nu schimbă nimic în această privinţă.

Expresiile „multitudine“, „mulțime“, „pluralitate“, dat fiind caracterul lor vag, nu sînt adecvate spre a servi la definirea numărului[111].

Referitor la unu și unitate se mai pune problema modului în care putem atenua caracterul arbitrar al concepției ce părea să estompeze orice distincție între unu și multiplu.

Delimitarea, indivizibilitatea, indecompozabilitatea nu sînt caracteristici relevante pentru ceea ce noi exprimăm prin cuvîntul „unu“.

Atunci cînd numim unități lucrurile numărate, afirmația necondiționată că unitățile ar fi identice este falsă. Desigur, este corect dar nesemnificativ faptul că într-o anumită privință unitățile sînt identice. Caracterul distinct al lucrurilor pe care le numărăm este chiar necesar, atunci cînd numărul în cauză va fi mai mare ca 1. Așadar, se părea că eram puși în situația de a atribui unităților două proprietăți contradictorii: identitatea și discernabilitatea[112].

Între unu și unitate trebuie să facem o distincție. Cuvîntul „unu“, ca nume propriu al unui obiect de cercetare matematică nu admite plural. Ca atare, este absurd să facem ca numerele să rezulte din alăturarea unu-urilor. În $1+1=2$, simbolul plus nu poate semnifica o atare alăturare.

§ 46. Pentru a clarifica lucrurile, va fi indicat să privim numărul în contextul unei judecăți, acolo unde iese în evidență modalitatea sa originară de aplicare[113]. Dacă privitor la unul și același fenomen extern pot afirma la fel de adevărat „acesta este un grup de pomi“ și „aceștia sînt cinci pomi“, sau „iată patru companii“ și „iată 500 de oameni“, atunci ceea ce se schimbă de la caz la caz nu este nici lucrul individual, nici întregul, agregatul, ci denumirea folosită. Dar acesta nu este decît semnul înlocuirii unui concept prin altul[114]. Astfel, pentru noi devine evident, ca răspuns la prima întrebare din secțiunea precedentă, că aserțiunea numerică cuprinde un enunț pri-

vitor la un concept[115]. Aceasta este poate cel mai evident în cazul numărului 0. Dacă spunem: „Venus are 0 sateliţi" nu avem în fapt un satelit sau agregat de sateliţi despre care ar putea fi ceva enunţat; în schimb, conceptului „satelit al lui Venus" i se atribuie astfel o proprietate, şi anume aceea de a nu cuprinde nimic. Dacă se spune: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai", atunci se atribuie numărul patru conceptului „cal înhămat la trăsura împăratului".

Se poate obiecta că un concept cum, de exemplu, este acela de „locuitor al statului german", deşi îşi păstrează neschimbate notele sale, posedă o proprietate ce variază de la an la an, în cazul cînd aserţiunea numerică ar enunţa despre el o asemenea proprietate. Răspunzînd acestei obiecţii, putem arăta că şi proprietăţile obiectelor variază, dar aceasta nu ne împiedică să le recunoaştem ca fiind aceleaşi. În cazul de faţă însă, motivul poate fi determinat încă şi mai precis. Conceptul „locuitor al Germaniei" conţine, într-adevăr, timpul ca parte componentă variabilă sau, ca să mă exprim matematic, este funcţie de timp. Pentru „*a* este un locuitor al Germaniei" putem spune: „*a* locuieşte în Germania", afirmaţie ce se referă tocmai la momentul prezent. Aşadar, însuşi conceptul conţine din capul locului un element fluid. În schimb, însă, conceptului „locuitor al Germaniei în prima secundă a anului 1883, ora Berlinului" îi revine în vecii vecilor unul şi acelaşi număr[116].

§ 47. Faptul că aserţiunea numerică exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile, poate fi prilej de uimire numai pentru cel ce consideră conceptul ca ceva subiectiv, asemenea reprezentării. Dar această concepţie este falsă. Atunci cînd, de exemplu, subordonăm conceptul de corp faţă de conceptul de greu, sau cînd subordonăm conceptul balenă faţă de acela de mamifer[117], afirmăm prin aceasta ceva obiectiv[118]. Or, dacă conceptele ar fi subiective, atunci şi subordonarea unuia faţă de un altul ca relaţie între concepte ar constitui

ceva subiectiv, așa cum este o relație între reprezentări. La prima vedere, fără îndoială, propoziția

„toate balenele sînt mamifere"

pare să trateze despre animale, nu despre concepte[119]; dacă ne întrebăm însă despre care animale este vorba, nu sîntem în măsură să indicăm un anumit animal individual. Admițînd că ne aflăm în fața unei balene, propoziția noastră nu afirmă totuși nimic despre aceasta. Pe baza propoziției noastre nu s-ar putea conchide că animalul în fața căruia ne aflăm ar fi o balenă, lucru despre care propoziția noastră inițială nu cuprinde nimic. În general, nu este posibil să vorbim despre un obiect fără a-l desemna sau a-l denumi într-un fel sau altul[120]. Cuvîntul „balenă" nu denumește însă o anume ființă individuală. Se va obiecta că, într-adevăr, nu este vorba despre un anume obiect individual determinat, ci despre unul nedeterminat; după părerea mea, „obiect nedeterminat" nu este decît o altă expresie pentru „concept", și anume o expresie inadecvată, contradictorie[121]. Chiar dacă propoziția noastră poate fi justificată numai prin observarea unor animale individuale, aceasta nu demonstrează nimic în ceea ce privește conținutul ei. Dacă ne interesează la ce anume se referă propoziția în cauză, faptul că ea este adevărată sau nu n-are importanță, după cum n-are importanță nici pe ce temeiuri o considerăm adevărată. Așadar, dacă conceptul este ceva obiectiv, atunci și un enunț cu privire la acesta poate cuprinde un element factual.

§ 48. În cazul unor exemple anterioare unde se crea aparența că unuia și aceluiași lucru îi revin numere diferite, explicația rezidă în faptul că obiectele erau considerate ca suport al numărului. De îndată ce repunem în drepturi adevăratul suport — conceptul — numerele se dovedesc a fi la fel de exclusive unul față de altul ca și, în domeniul respectiv, culorile.

Acum înțelegem și felul în care apare intenția de a obține numărul făcînd abstracție de lucruri. Ceea ce do-

bîndim în acest fel este conceptul, la care apoi descoperim numărul. Aşadar, în realitate, abstracţia premerge adesea formarea unei judecăţi numerice. Confuzia este aceeași ca în cazul cînd am spune: conceptul pericolului de incendiu se obţine construind un imobil din paiantă cu fronton de scînduri, acoperiş de paie și hornuri neetanșe. Puterea de strîngere pe care o are conceptul depășește cu mult capacitatea unificatoare a apercepţiei sintetice. Aceasta din urmă nu ne-ar permite să unim într-un întreg locuitorii Germaniei; dar ei pot fi subsumaţi conceptului „locuitor al Germaniei" și număraţi[122].

Acum devine explicabilă și aplicabilitatea pe scară largă a numărului. Este într-adevăr o enigmă cum un același lucru se poate enunţa la fel despre fenomene exterioare, despre fenomene interioare, despre ceea ce este spaţial și despre ceea ce este temporal ca și despre ceea ce este aspaţial și atemporal. Dar aserţiunea numerică nu îndeplinește nici ea acest oficiu. Numerele sint atribuite numai conceptelor, sub acestea aducîndu-se ceea ce este de ordin exterior şi ceea ce este de ordin interior, spaţialul și temporalul, aspaţialul și atemporalul.

§ 49. Concepţia noastră își găsește o confirmare la Spinoza[123], care spune*: „Răspund că un lucru este numit unul sau unic numai în privinţa existenţei sale, nu însă și în privinţa esenţei sale; căci noi ne reprezentăm lucrurile sub specia numerelor numai după ce ele au fost aduse la o măsură comună. Dacă, de pildă, cineva ţine în mînă un sesterţ și un imperial, el nu va gîndi numărul doi dacă nu va fi în măsură să aplice acestui sesterţ și acestui imperial unul și același nume, și anume de argint sau monedă: atunci poate el să afirme că are doi arginţi sau două monede; căci el desemnează nu numai sesterţul, ci şi imperialul prin numele de monedă". Cînd Spinoza continuă: „De aici este clar că un lucru este spus a fi unul sau unic numai după ce un alt lucru a fost reprezentat, lucru care (ca să spunem așa) concordă cu

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 169.

dînsul“[124], şi consideră că, în sens propriu, Dumnezeu nu poate fi numit unul sau unic, deoarece nu sîntem în măsură să formăm un concept abstract despre esenţa acestuia, Spinoza se înşeală crezînd că conceptul poate fi obţinut numai făcînd nemijlocit abstracţie de mai multe obiecte. Dimpotrivă, la concept se poate ajunge şi pornind de la note[125]; iar în acest caz este cu putinţă ca nici un lucru să nu i se subsumeze[126]. Dacă nu ar fi aşa, nu am putea nega vreodată existenţa, şi astfel afirmarea existenţei ar fi la rîndul ei lipsită de conţinut[127].

§ 50. E. Schröder* subliniază că, pentru a se putea vorbi despre frecvenţa unui lucru, numele acelui lucru trebuie să fie întotdeauna un nume generic, un substantiv comun *(notio communis)*: „De îndată, aşadar, ce se are în vedere un obiect în mod complet — cu toate proprietăţile şi relaţiile sale — acesta devine unic în lume în genul său şi nu-şi mai are seamăn. Numele obiectului va avea atunci caracterul unui nume propriu *(nomen proprium)* şi obiectul nu va putea fi gîndit ca un obiect ce apare în mod repetat. Dar aceasta este valabil în genere despre orice lucru, chiar dacă reprezentarea acestuia se constituie pe baza unor abstracţiuni, cu singura condiţie ca această reprezentare să înglobeze în sine suficiente elemente pentru a determina integral lucrul respectiv...“. A fi numărat „devine cu putinţă în cazul unui lucru numai în măsura in care trecem cu vederea sau facem abstracţie de unele însuşiri şi relaţii ce îi sînt proprii şi prin intermediul cărora el se diferenţiază de toate celelalte lucruri; abia atunci numele lucrului devine un concept aplicabil la mai multe lucruri“.

§ 51. Ceea ce conţine adevărat această explicaţie este îmbrăcat în expresii atît de întortochiate şi derutante, încît se impun o analiză şi o triere. În primul rînd, este inadecvat să spunem că un nume comun este nume al

---

* *Op. cit.*, p. 6.

unui lucru. În felul acesta se creează aparența că numărul ar fi proprietate a unui lucru. Un nume comun desemnează tocmai un concept[128]. Numai împreună cu articolul hotărît sau cu un pronume demonstrativ el funcționează în calitate de nume propriu al unui lucru, dar, prin aceasta, el încetează să funcționeze ca nume comun. Numele unui lucru este un nume propriu[129]. Mai departe, nu un obiect apare în mod repetat, ci mai multe obiecte cad sub un concept. Am observat deja, obiectînd lui Spinoza, că un concept se poate obține și altfel decît prin abstracție, adică pornind de la lucrurile care i se subsumează. Aici mai adaug că un concept nu încetează să fie concept atunci cînd lui i se subsumează un singur lucru care, astfel, este determinat în mod integral pe baza acestui concept[130]. Unui asemenea concept (de exemplu, cel de satelit al Pămîntului) îi revine tocmai numărul 1, care este număr în același sens în care sînt 2 și 3. În cazul unui concept se pune întotdeauna întrebarea dacă lui i se subsumează ceva, și anume ce. În cazul unui nume propriu, asemenea întrebări sînt lipsite de sens[131]. Nu trebuie să ne lăsăm înșelați de faptul că în cadrul limbii un nume propriu, de exemplu, Lună, este folosit în calitate de substantiv comun, și viceversa[132]; în pofida acestui fapt, distincția subzistă. De îndată ce cuvîntul este întrebuințat împreună cu articolul nehotărît sau la plural fără articol, el este un termen conceptual, un nume comun.

§ 52. O altă confirmare a concepției după care numărul este aplicat conceptelor o putem găsi în uzul limbii germane, în care spunem „zehn Mann“, „vier Mark“, „drei Fass“, utilizînd singularul [133]. În cazul de față, singularul ar putea să indice că este vizat nu lucrul, ci conceptul. Avantajul acestui mod de exprimare iese în evidență în mod deosebit în cazul numărului 0. Altminteri, ce-i drept, limbajul atribuie numărul nu conceptului, ci obiectelor: vorbim despre „numărul mingilor“, așa cum vorbim despre „greutatea mingilor“. În acest fel, vorbim în aparență despre obiecte, pe cînd, in realitate, vrem să enunțăm ceva despre un concept. Această uzanță

lingvistică este derutantă. Expresia „patru cai de rasă" creează aparența că „patru" califică conceptul „cal de rasă", la fel cum „de rasă" califică conceptul „cal". În realitate, numai „de rasă" este o notă de acest gen; prin intermediul cuvîntului „patru" enunțăm ceva despre un concept[134].

§ 53. Prin proprietățile enunțate despre un concept nu înțeleg, desigur, notele care alcătuiesc conceptul. Acestea din urmă sint proprietăți ale lucrurilor care cad sub concept, și nu ale conceptului însuși[135]. De exemplu, „dreptunghic" nu este o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic", dar propoziția că nu există nici un triunghi dreptunghic rectiliniu echilateral exprimă o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic rectiliniu, echilateral"[136]; ea ii atribuie numărul zero[137].

Sub acest raport, existența este analoagă numărului. Afirmarea existenței nu este de fapt nimic altceva decît negarea numărului zero[138]. Întrucît existența este o proprietate a conceptului, demonstrația ontologică a existenței lui Dumnezeu nu-și atinge ținta. La fel de puțin ca și existența este însă unicitatea o notă a conceptului „Dumnezeu". Unicitatea nu poate servi in vederea definiției acestui concept, tot așa cum nici soliditatea, vastitatea și comoditatea unei case nu pot fi utilizate împreună cu pietrele, mortarul și grinzile, în vederea construirii sale[139]. Cu toate acestea, din faptul că ceva este proprietate a unui concept nu se poate conchide în mod general că din concept, adică din notele acestuia, ea nu s-ar putea infera. În anumite împrejurări aceasta este cu putință, așa cum, de exemplu, din calitățile materialului de construcție putem trage de multe ori o concluzie cu privire la durabilitatea unui edificiu. De aceea, ar fi excesiv să pretindem că din notele unui concept nu se poate infera nimic asupra unicității sau existenței; numai că aceasta nu se poate produce vreodată în mod la fel de imediat ca atunci cînd nota unui concept este atribuită ca proprietate unui obiect subsumat acestui concept[140].

Tot astfel, ar fi o eroare a nega că existența și unici-

tatea pot fi uneori note ale unor concepte. Ele nu sînt însă note ale acelui concept căruia, potrivit uzanţelor lingvistice, i s-ar putea atribui. Atunci cînd, de exemplu, toate conceptele cărora li se subsumează un acelaşi unic obiect sînt strînse sub un concept[141], unicitatea constituie o notă a acestuia din urmă. Sub conceptul menţionat cade, de exemplu, conceptul „satelit al Pămîntului", dar nu cade însuşi corpul ceresc care poartă acelaşi nume. Aşadar, putem subsuma un concept unui alt concept mai înalt, unui concept, ca să spunem aşa, de ordinul doi. Această relaţie nu trebuie însă confundată cu relaţia de subordonare.

§ 54. Acum devine posibil să definim unitatea în mod satisfăcător. La p. 7 a manualului său menţionat anterior, E. Schröder spune: „Acel nume generic sau concept se va chema denumirea numărului format în modul arătat; el constituie esenţa unităţii sale".

Într-adevăr, n-ar fi oare cel mai potrivit să numim un concept unitate în raport cu numărul care îi revine? Am putea întrezări atunci un sens al aserţiunilor după care unitatea se delimitează faţă de mediul său înconjurător şi este indivizibilă. Într-adevăr, conceptul căruia i se atribuie numărul delimitează în general, într-un anume mod, ceea ce cade sub el. Conceptul „literă a cuvîntului *cinci*" îl delimitează pe *c* faţă de *i*, pe *i* faţă de *n*, ş.a.m.d. Conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*" desprinde cuvîntul ca un întreg care este indivizibil, în sensul că părţile nu mai cad sub conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*". Nu toate conceptele au aceeaşi însuşire. Spre a lua un exemplu, putem divide în variate feluri ceea ce cade sub conceptul roşu, fără ca părţile să înceteze să cadă sub acelaşi concept. Unui asemenea concept nu-i revine vreun număr finit[142]. În consecinţă, propoziţia privind caracterul delimitat şi indivizibilitatea unităţii poate fi formulată astfel:

Numai un concept care delimitează în mod determinat ceea ce subsumează şi care nu permite o divizare arbitrară poate fi unitate în raport cu un număr finit.

Vedem însă că indivizibilitatea are aici o semnificație specială.

Acum putem înțelege cu ușurință cum se pot împăca între ele identitatea și discernabilitatea unităților. Cuvîntul „unitate“ este folosit aici în două sensuri. Unitățile sînt identice în accepția explicată mai sus a acestui cuvînt. În propoziția „Iupiter are patru sateliți“, unitatea este „satelit al lui Iupiter“. Sub acest concept cade atît satelitul I, cît și sateliții II, III și IV. Ca atare, putem spune: unitatea la care se raportează I este identică unității la care se raportează II, și așa mai departe. Aici avem identitatea. Atunci cînd se afirmă însă discernabilitatea unităților, înțelegem prin aceasta caracterul distinct al lucrurilor numărate.

IV. Conceptul de număr[143]

Fiecare număr individual este un obiect de sine-stătător

§ 55. După ce am descoperit că aserțiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept, putem încerca să completăm definițiile leibniziene ale numerelor individuale cu definiția lui 0 și cea a lui 1.

În mod evident, putem stipula: numărul 0 revine unui concept atunci cînd sub acesta nu cade nici un obiect. Aici însă, locul lui 0 pare a fi luat de particula „nici un“ care are aceeași semnificație. În consecință, este preferabilă următoarea formulare: numărul 0 revine unui concept atunci cînd propoziția că *a* nu cade sub acest concept este valabilă în general pentru orice *a*[143a].

În mod similar s-ar putea spune: numărul 1 revine unui concept F atunci cînd propoziția că *a* nu cade sub F nu are loc în mod general, pentru orice *a*, și cînd din propozițiile:

„*a* cade sub F“ și „*b* cade sub F“

urmează în general că *a* și *b* sînt identici[144].

Ne mai rămîne să definim în cazul general trecerea de la un număr la numărul imediat următor. Să analizăm următoarea formulare: numărul (n+1) revine conceptului F atunci cînd există un obiect *a* care cade sub **F** şi este astfel încît numărul *n* revine conceptului „subsumat lui **F**, dar nu *a*“[145].

§ 56. Aceste definiţii par atît de fireşti în lumina rezultatelor noastre de pînă acum, încît se cere să explicăm de ce ele nu ne pot fi suficiente.

Ultima definiţie este aceea care suscită dubii; într-adevăr, riguros vorbînd, sensul expresiei „numărul *n* revine conceptului G“ ne este la fel de necunoscut ca şi cel al expresiei „numărul (*n*+1) revine conceptului **F**“. Fără indoială, prin intermediul acestei definiţii, precum şi al celei precedente, putem spune ce înseamnă

„numărul 1+1 revine conceptului **F**“,

iar după aceea, folosind această din urmă expresie, putem să determinăm sensul expresiei

„numărul 1+1+1 revine conceptului **F**“

şi aşa mai departe; însă — ca să dăm un exemplu pregnant — definiţiile noastre nu ne permit nicicînd să decidem dacă unui concept îi revine cumva numărul Iulius Caesar, dacă acest faimos cuceritor al Galliei este sau nu este un număr. Mai departe, definiţiile propuse nu ne ajută să demonstrăm că dacă numărul *a* revine conceptului F şi numărul *b* revine aceluiaşi concept, atunci în mod necesar *a*=*b*. Expresia „numărul care revine conceptului **F**“ nu ar putea fi deci justificată şi, în genere, ar fi imposibil să demonstrăm pe baza ei o identitate numerică, dat fiind că nu am fi in măsură să concepem un număr determinat. Numai în aparenţă am definit noi numărul 0, numărul 1; în realitate, nu am precizat decit sensul expresiilor

„numărul 0 revine“,
„numărul 1 revine“,

ceea ce nu ne permite totuși să distingem înăuntrul acestor expresii pe 0, pe 1, ca obiecte independente, recognoscibile[146].

§ 57. Aici este locul să analizăm mai atent afirmația noastră după care orice aserțiune numerică cuprinde un enunț despre un concept.

În propoziția „numărul 0 revine conceptului F", 0 este numai o parte a predicatului, dacă considerăm conceptul F ca subiect real[147]. Din acest motiv, am evitat să numesc un număr cum este 0 sau 1 sau 2 o *proprietate* a unui concept. Tocmai datorită faptului că nu formează decît o parte în ceea ce este enunțat, fiecare număr individual apare ca un obiect de sine-stătător[148]. Am atras deja atenția asupra faptului că spunem „numărul 1" și că astfel prin intermediul articolului hotărît, noi îl erijăm pe 1 în calitate de obiect. În aritmetică, această existență independentă apare la fiecare pas, de exemplu, în egalitatea $1+1=2$. Întrucît în cele de față noi urmărim să înțelegem conceptul de număr în modul în care el este utilizat în știință, nu trebuie să ne tulbure faptul că în utilizarea lingvistică cotidiană numărul apare și în construcții atributive. Aceasta se poate evita întotdeauna. De exemplu, propoziția „Iupiter are patru sateliți" se poate transpune în „numărul sateliților lui Iupiter este patru". Aici, „este" nu trebuie considerat ca simplă copulă, ca în cadrul propoziției „cerul este albastru". O dovadă în acest sens este faptul că putem spune: „Numărul sateliților lui Iupiter este acela de patru" sau „este numărul patru". Aici, „este" are sensul de „este identic", „este același cu". Avem așadar o identitate, care afirmă că expresia „numărul sateliților lui Iupiter" desemnează același obiect ca și cuvîntul „patru"[149]. Or, forma identității este forma dominantă în cuprinsul aritmeticii. Acest mod de a vedea lucrurile nu este contrazis de faptul că în cadrul cuvîntului „patru" nu este cuprins nimic cu privire la Iupiter sau la Lună. Nici numele „Columb" nu conține nimic cu privire la descoperire sau

la America şi totuşi un acelaşi ins este numit Columb şi descoperitorul Americii[150].

§ 58. S-ar putea obiecta că despre obiectul pe care îl numim Patru sau îl numim Numărul sateliţilor lui Iupiter nu ne putem face nici o idee* ca despre ceva autonom. Dar răspunderea în acest sens nu o poartă autonomia pe care am conferit-o numărului. Desigur, adesea se admite cu uşurinţă că in reprezentarea a patru puncte ale unui zar intervine ceva ce ar corespunde cuvîntului „patru"; aceasta este însă o iluzie. Să ne gîndim la o livadă verde şi să vedem dacă reprezentarea se schimbă atunci cînd înlocuim articolul nehotărît prin numeralul „una". Nimic nu se adaugă în acest caz, în timp ce, dimpotrivă, cuvîntul „verde" işi găseşte un corespondent in cadrul reprezentării. Atunci cind ne reprezentăm cuvîntul tipărit „fier"[151] nu ne gindim mai întîi la vreun număr. Dacă însă ne întrebăm din cîte litere este compus cuvîntul obţinem numărul 4; dar prin aceasta reprezentarea nu devine cu *nimic mai distinctă*, ci poate rămîne absolut neschimbată. Numărul îl descoperim tocmai în conceptul de „literă a cuvîntului fier" care intervine aici. În cazul celor patru puncte ale unui zar situaţia se prezintă ceva mai confuz, întrucît conceptul ni se impune atît de imediat, datorită asemănării dintre punctele zarului, încît nici măcar nu mai observăm intervenţia sa. Numărul nu poate fi reprezentat nici ca obiect autonom, nici ca proprietate a unui lucru exterior, întrucît el nu este *nici* ceva senzorial, *nici* proprietate a unui lucru exterior. Faptul este cît se poate de clar încă în cazul numărului 0. În zadar vom încerca să ne reprezentăm 0 stele vizibile. De bună seamă, ne putem gîndi la un cer acoperit în întregime de nori; dar aici nu avem nimic ce ar corespunde cuvîntului „stea" sau lui 0. Nu facem altceva decit să ne reprezentăm o stare de lucruri care poate ocaziona judecata: în clipa de faţă nu se poate vedea nici o stea.

---

* „Idee", „reprezentare", luată în sensul de imagine intuitivă.

§ 59. S-ar putea ca orice cuvînt — chiar și unul ca „numai" — să ne evoce o anumită reprezentare; dar aceasta din urmă nu va corespunde neapărat conţinutului cuvîntului; alţi oameni pot avea o reprezentare cu totul diferită. În acest caz, ne vom reprezenta, desigur, o stare de lucruri ce trimite la o propoziţie în cuprinsul căreia apare respectivul cuvînt; sau, cum se mai poate întîmpla, cuvîntul rostit evocă în memorie cuvîntul scris.

Faptul are loc nu numai în cazul particulelor. Nu încape îndoială că nu avem vreo reprezentare a distanţei dintre noi și Soare. Într-adevăr, chiar dacă știm regula care ne arată de cîte ori trebuie să multiplicăm un etalon de lungime, orice tentativă de a ne forma potrivit acestei reguli o imagine măcar în unele privinţe adecvată este sortită eșecului. Dar acesta nu este un motiv de a ne îndoi de justeţea calculului prin care am aflat distanţa și nu ne împiedică în nici un fel să întemeiem raţionamentele ulterioare pe existenţa acestei distanţe.

§ 60. Pînă și un lucru atît de concret cum este Pămîntul, noi nu ni-l putem reprezenta așa cum știm că este; ne mulţumim cu o sferă de mărime neînsemnată, care constituie pentru noi un simbol al Pămîntului, deși știm prea bine că ea diferă foarte mult de acesta. Dar, deși adesea reprezentarea noastră nu corespunde deloc intenţiei[1], noi judecăm cu un grad înalt de certitudine despre un obiect cum este Pămîntul, pină și atunci cînd mărimea acestuia este și ea luată în consideraţie.

În mod frecvent, gîndirea ne duce dincolo de graniţele reprezentabilului, fără ca prin aceasta să pierdem suportul raţionamentelor noastre. Chiar dacă, așa cum s-ar părea, nouă, oamenilor, ne este cu neputinţă să gîndim fără reprezentări, conexiunea acestora din urmă cu ceea ce este gîndit poate rămîne absolut exterioară, arbitrară și convenţională.

Așadar, chiar atunci cînd conţinutul unui cuvînt nu este reprezentabil, nu avem vreun temei să-i contestăm orice semnificaţie sau să interzicem utilizarea lui. Impresia contrară apare tocmai datorită faptului că analizăm

cuvintele în mod izolat şi căutăm astfel semnificaţia lor, luînd de aceea în această calitate o reprezentare. În consecinţă, cuvîntul pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare pare a fi lipsit de orice conţinut. Or, întotdeauna trebuie să avem în vedere o propoziţie completă. Numai în cadrul acesteia cuvintele au, propriu-zis, o semnificaţie. Imaginile lăuntrice care ne apar cumva cu acest prilej nu sînt obligate să corespundă componentelor logice ale judecăţii. Este de ajuns ca propoziţia în întregul ei să aibă un sens; prin aceasta, părţile sale capătă la rîndul lor un conţinut.

Această remarcă îmi apare a fi aptă să arunce o lumină asupra unor concepte dificile, cum este cel al infinitesimalelor*, iar valabilitatea ei nu se limitează la domeniul matematicii[153].

Autonomia pe care o atribuim numărului nu înseamnă că un numeral ar desemna ceva în afara contextului unei propoziţii[154]; prin aceasta, nu vreau decît să exclud folosirea lui în calitate de predicat sau atribut, folosire care îi modifică într-o anumită măsură semnificaţia.

§ 61. Dar, cum poate ni se va obiecta, chiar dacă Pămîntul nu este propriu-zis reprezentabil, el rămîne totuşi un lucru exterior, care ocupă un loc determinat; unde este însă numărul 4? El nu este nici în afara noastră, nici înăuntrul nostru. Aceasta este adevărat în sens spaţial. A determina locul numărului 4 n-are nici un sens; dar de aici urmează numai că acesta nu este un obiect spaţial, şi nu urmează că în genere el nu este un obiect. Nu orice obiect este undeva. Nici reprezentările noastre** nu sînt, în acest sens, înăuntrul nostru (subcutaneu). Înăuntrul nostru se găsesc celule ganglionare, corpuscule sanguine ş.a., dar nu reprezentări. În cazul

* Problema este de a defini sensul unei egalităţi

$$d f(x) = g(x) d x,$$

dar nu de a indica un segment mărginit de două puncte distincte, a cărui lungime să fie d x.

** Înţelegînd acest cuvînt în sens pur psihologic, nu psihofizic.

lor, predicatele spaţiale nu sînt aplicabile: o reprezentare nu este situată la dreapta sau la stînga alteia; reprezentările nu se află între ele la distanţe măsurabile in milimetri. Spunînd totuşi că reprezentările se află în noi, vrem prin aceasta să le desemnăm ca subiective.

Dar, chiar dacă admitem că subiectivul nu are poziţie, cum este cu putinţă ca ceva obiectiv cum este numărul 4 să nu fie nicăieri? Eu afirm că aici nu este nici o contradicţie. Numărul este într-adevăr exact acelaşi pentru toţi cei care se ocupă cu el, dar aceasta nu are nimic de-a face cu spaţialitatea. Nu orice obiect obiectiv[155] are un loc[156].

Spre a obţine conceptul de număr[157] trebuie stabilit sensul unei identităţi numerice

§ 62. Cum ne vor fi date numerele, de vreme ce despre acestea nu putem avea vreo reprezentare sau intuiţie? Cuvintele semnifică ceva numai în contextul unei propoziţii. Aşadar, problema este de a clarifica sensul unei propoziţii în cuprinsul căreia figurează un numeral[158]. Aceasta mai lasă încă loc arbitrarului. Dar noi am stabilit deja că numerele trebuie înţelese ca reprezentînd obiecte independente. În felul acesta dispunem de o specie de propoziţii care trebuie să aibă un sens, şi anume propoziţiile care exprimă o recogniţie. Dacă semnul *a* urmează să ne desemneze un obiect, trebuie să dispunem de un criteriu care să decidă în toate cazurile dacă *b* este acelaşi cu *a*, chiar dacă nu întotdeauna stă în puterea noastră să aplicăm acest criteriu. În cazul nostru, trebuie să definim sensul propoziţiei

„numărul ce revine conceptului F este acelaşi cu cel ce revine conceptului G";

cu alte cuvinte, trebuie să redăm într-un alt mod conţinutul acestei propoziţii, fără a recurge la expresia

„numărul ce revine conceptului F".

Vom da astfel un criteriu general pentru identitatea numerelor. După ce am căpătat un asemenea mijloc pentru a concepe un număr determinat și a-l recunoaște ca același, îi putem atribui un numeral în calitate de nume propriu[159].

§ 63. Un asemenea mijloc a fost indicat încă de către Hume*: „Cînd două numere se combină în așa fel încît unul are mereu o unitate care corespunde fiecărei unități a celuilalt, noi le declarăm egale"[160]. Mai recent, se pare că în rîndul matematicienilor** a găsit un mare ecou opinia după care identitatea numerică trebuie definită prin intermediul corespondenței biunivoce. Dar de la bun început se ridică anumite dubii și dificultăți logice, pe care nu le putem ocoli fără a le supune unui examen. Relația de identitate nu intervine numai în cazul numerelor. De aici pare să rezulte că ea nu trebuie definită special pentru cazul de față. S-ar admite, așadar, că conceptul de identitate a fost fixat în prealabil și că apoi pe baza lui și a conceptului de număr, trebuie să se poată deduce cînd numerele sînt identice între ele, fără să mai fim nevoiți a apela la o definiție specială.

Împotriva acestui punct de vedere trebuie să remarcăm că pentru noi conceptul de număr nu a fost precizat încă, el urmînd a fi determinat abia prin intermediul definiției noastre. Intenția noastră este de a construi conținutul unei judecăți care să poată fi privită ca o identitate, în așa fel încît fiecare membru al acestei identități să fie un număr[162]. Așadar, nu intenționăm a defini identitatea special pentru acest caz, ci vrem să obținem prin intermediul conceptului în prealabil cunoscut al identității ceea ce trebuie considerat ca identic. Desigur, o asemenea

---

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 565.

** Cf. E. SCHRÖDER, *op. cit.*, pp. 7—8; E. KOSSAK, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums*, Berlin, 1872, p. 16; G. CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883[161].

definiţie pare a fi cu totul neobişnuită, iar logicienii nu au examinat-o încă suficient; dar unele exemple pot arăta că ea nu este nemaiauzită[163].

§ 64. Judecata „dreapta *a* este paralelă cu dreapta „*q* sau în simboluri:

$$a//b,$$

poate fi înţeleasă ca o identitate. În acest caz, obţinem conceptul de direcţie şi spunem: „direcţia dreptei *a* este identică cu direcţia dreptei *b*“. Înlocuim aşadar semnul // prin semnul mai general =, transferînd asupra lui *a* şi *b* conţinutul specific al primului semn[164]. Noi scindăm conţinutul într-un mod diferit de cel iniţial, obţinînd astfel un nou concept[165]. Ce-i drept, adesea lucrurile sînt înţelese exact pe dos, unii profesori definind dreptele paralele ca drepte avînd aceeaşi direcţie. Propoziţia: „Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele“ poate fi atunci demonstrată cît se poate de comod, apelînd la o proprietate a identităţii, formulată analog. Numai că, din păcate, adevărata stare de lucruri este astfel răsturnată. Într-adevăr, tot ce este geometric trebuie, negreşit, să aparţină iniţial intuiţiei. Întreb deci, dacă cineva are intuiţia direcţiei unei drepte. Intuiţia dreptei însăşi, o are negreşit! Dar înăuntrul intuiţiei acestei drepte mai distingem oare şi direcţia ei? E greu de crezut. Conceptul în cauză este descoperit abia printr-o activitate intelectuală originată în intuiţie. Dimpotrivă, asupra dreptelor paralele dispunem de o reprezentare[166]. Acea demonstraţie despre care am vorbit mai sus devine posibilă numai printr-o presupunere ilîcită, introducînd în accepţia cuvîntului „direcţie“ ceea ce trebuie abia să fie demonstrat; într-adevăr, dacă propoziţia „două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele“ ar fi falsă, $a//b$ nu ar putea fi transformată într-o identitate.

Tot astfel, pornind de la paralelismul planelor putem obţine un concept care corespunde celui de direcţie în cazul dreptelor. În lecturile mele, am constatat că în acest scop se foloseşte termenul de „orientare“. Din ase-

mănarea geometrică provine conceptul de formă, astfel că, de exemplu, în loc de a spune „ambele triunghiuri sînt asemenea“ spunem „ambele triunghiuri au o formă identică“, sau „forma unui triunghi este identică cu forma celuilalt“. Şi, la fel, din colinearitatea formelor geometrice putem extrage un concept căruia încă nu i s-a dat un nume.

§ 65. Acum, pentru a ajunge, de exemplu, de la paralelism* la conceptul de direcţie, să încercăm următoarea definiţie:

Propoziţia

„dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*“

înseamnă:

„direcţia dreptei *a* este identică cu direcţia dreptei *b*“.

Această definiţie se abate de la uzanţe în măsura în care aparent ea determină relaţia deja cunoscută de identitate, pe cînd în realitate este menită să introducă expresia „direcţia dreptei a“, expresie care survine în cadrul ei numai în mod secundar[167]. Pe această bază apare un alt dubiu, şi anume dacă stipularea de mai sus nu poate duce la o contradicţie faţă de legile cunoscute ale identităţii. Care sînt aceste legi? În calitate de adevăruri analitice, ele ar trebui să poată fi deduse din însuşi conceptul ca atare[168]. Or, Leibniz** introduce definiţia:

„*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*“,

pe care mi-o însuşesc ca definiţie a identităţii[169]. Este indiferent dacă spunem „acelaşi“, ca Leibniz, sau dacă

---

* Spre a putea să mă exprim mai comod şi spre a mă face înţeles cu mai multă uşurinţă, vorbesc aici despre paralelism. Esenţa acestor explicaţii poate fi transferată cu uşurinţă la cazul identităţii numerice.

** *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (ed. Erdmann, p. 94).

spunem „egal". „Același" pare, e-i drept, să exprime o concordanță perfectă, în timp ce „egal" pare să exprime o concordanță doar sub un anumit raport; putem adopta însă un mod de exprimare care să anihileze această diferență, spunînd, de pildă, „lungimea segmentelor este egală" sau „este aceeași", în loc de a spune „segmentele sînt egale în lungime", și spunînd „culoarea suprafețelor este identică", în loc de a spune „suprafețele sînt identice în culoare". Tocmai așa am folosit mai sus cuvîntul în exemple[170]. În fapt, toate legile identității sînt cuprinse în posibilitatea universală de substituire[171].

Pentru a justifica încercarea noastră de definire a direcției unei drepte, ar trebui, așadar, să arătăm că dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b* putem înlocui peste tot

direcția lui *a*

prin

direcția lui *b*.

Lucrurile se simplifică datorită faptului că inițial nu avem despre direcția unei drepte nici un alt enunț decît că ea coincide cu direcția unei alte drepte. Așadar, nu ne-ar mai rămîne decît să arătăm posibilitatea înlocuirii în cadrul unei asemenea identități sau în cadrul conținuturilor pe care astfel de identități le pot avea în calitate de părți componente*. Toate celelalte tipuri de enunțuri privitoare la direcții urmează a fi explicate în prealabil; în vederea definițiilor lor putem emite regula care să asigure posibilitatea înlocuirii direcției unei drepte prin direcția unei alte drepte, paralelă cu cea dintîi.

§ 66. Dar împotriva definiției propuse se mai poate aduce o a treia obiecție. În cadrul propoziției

„direcția lui *a* este identică cu direcția lui *b*",

---

* În cadrul unei judecăți ipotetice, de exemplu, o identitate a direcțiilor ar putea să figureze în calitate de condiție sau de consecință.

direcţia lui *a* apare ca obiect* iar definiţia noastră ne oferă un mijloc de recunoaştere a acestui obiect, în cazul cînd el s-ar înfăţişa într-o altă deghizare, de pildă ca direcţie a lui *b*. Dar acest mijloc nu dă satisfacţie în toate cazurile. De exemplu, el nu ne permite să decidem dacă Anglia este aceeaşi cu direcţia Pămîntului. Să ne fie scuzat acest exemplu, în aparenţă absurd! Dacă nimeni nu va confunda Anglia cu axa Pămîntului, cum e de la sine înţeles, aceasta nu se datorează totuşi definiţiei noastre. Ea nu spune nimic cu privire la faptul dacă propoziţia

„direcţia lui *a* este identică cu *q*"

trebuie afirmată sau negată, atunci cînd însuşi *q* nu este dat în forma „direcţia lui *b*". Conceptul de direcţie ne lipseşte, căci dacă l-am fi avut la dispoziţie am fi putut stipula că, dacă *q* nu este o direcţie atunci propoziţia noastră trebuie negată, iar dacă *q* este o direcţie atunci decide definiţia noastră anterioară. Am fi înclinaţi să introducem definiţia:

„*q* este o direcţie dacă există o dreaptă *b*, a cărei direcţie este *q*".

Dar acum este limpede că ne-am învîrtit în cerc. Pentru a putea aplica această definiţie ar trebui să ştim în fiecare caz în parte dacă propoziţia

„*q* este identică cu direcţia lui *b*"

trebuia afirmată sau negată.

---

* Acest lucru ni-l indică articolul hotărît. Pentru mine, conceptul este un posibil predicat al unui conţinut judicabil singular, în timp ce obiectul este un posibil subiect al acestuia. Dacă în propoziţia „direcţia axei telescopului este identică cu direcţia axei Pămîntului", considerăm ca subiect direcţia axei telescopului, predicatul va fi „identic cu direcţia axei Pămîntului". Acesta este un concept. Dar direcţia axei Pămîntului este numai o parte a predicatului; ea este un obiect, întrucît poate fi făcută şi subiect[172].

§ 67. Dacă am încerca să spunem: *q* este o direcţie dacă se introduce prin intermediul definiţiei formulate mai sus, am privi modul în care obiectul *q* a fost introdus ca pe o proprietate a acestuia, ceea ce nu concordă cu realitatea[173]. Definiţia unui obiect, luată ca atare, nu spune de fapt nimic despre acesta, ci stipulează semnificaţia unui semn. După aceasta, ea se transformă într-o judecată care se referă la obiectul în cauză, dar de această dată nu-l mai introduce şi stă în acelaşi rînd cu celelalte enunţuri privitoare la el[174]. Dacă am adopta această soluţie, am presupune că un obiect nu poate fi dat decît într-un unic mod; într-adevăr, în caz contrar, din faptul că *q* nu a fost introdus prin intermediul definiţiei noastre nu ar urma că *q* nu putea fi introdus astfel. Toate identităţile s-ar reduce la faptul că ceea ce ne este dat nouă într-un acelaşi mod trebuie să fie recunoscut ca unul şi acelaşi, ceea ce însă este atît de evident şi de steril încît nu merită să mai fie enunţat. În fapt, nici nu s-ar trage vreo concluzie distinctă de una sau alta din premisele noastre. Aplicabilitatea multilaterală şi importantă a identităţilor se bazează, dimpotrivă, tocmai pe faptul că sîntem în măsură să recunoaştem un lucru cu toate că el a fost dat în moduri diferite[175].

§ 68. Întrucît prin procedeele de mai sus nu putem obţine un concept precis al direcţiei, după cum din aceleaşi motive nu putem obţine un concept precis al numărului, vom încerca un alt drum. Dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*, extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta *a*“ este identică cu extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta *b*“; reciproc, dacă extensiunile conceptelor sus-menţionate sînt identice, *a* este paralelă cu *b*[176]. Să încercăm deci să definim:

direcţia dreptei *a* este extensiunea conceptului „paralel cu dreapta *a*“;
forma triunghiului *t* este extensiunea conceptului „asemenea cu triunghiul *t*“.

Pentru a aplica aceasta în cazul nostru, va trebui ca în locul dreptelor sau triunghiurilor să punem concepte, iar în locul paralelismului sau asemănării să punem posibilitatea corelării biunivoce a obiectelor subsumate unuia dintre concepte cu obiectele subsumate celuilalt. Pentru concizie, voi spune că conceptul F este echinumeric cu conceptul G atunci cînd există această posibilitate[177]; mă văd însă obligat să precizez că acest cuvînt trebuie privit ca un mijloc de desemnare ales în mod arbitrar, semnificația termenului urmînd să fie extrasă nu pe baza etimologiei sale, ci pe baza stipulării de mai sus.

În consecință, introduc următoarea definiție:

Numărul care revine conceptului F este extensiunea* conceptului „echinumeric cu conceptul F“[178].

§ 69. Poate că adecvarea acestei definiții nu va fi evidentă de la prima vedere. Într-adevăr, prin extensiune a unui concept nu înțelegem oare altceva? Ceea ce înțelegem prin extensiune rezultă limpede pe baza asertiunilor inițiale ce se pot emite cu privire la extensiunile conceptelor. Ele sînt următoarele:

1. identitatea,
2. faptul că una dintre ele este mai cuprinzătoare decît cealaltă.

---

* Cred că în loc de „extensiune a conceptului“ am fi putut spune pur și simplu „concept“. S-ar putea aduce însă două obiecții:

1. Aceasta ar contrazice afirmația mea anterioară după care numerele individuale sînt obiecte, așa cum ne indică deopotrivă folosirea articolului hotărît în expresii ca „numărul doi“, imposibilitatea de a vorbi despre unu-uri, doi-uri etc. la plural, precum și faptul că numărul constituie numai o parte a predicatului dintr-o aserțiune numerică;

2. conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă.

Eu cred că ambele obiecții pot fi înlăturate; dar aceasta ne-ar putea abate prea mult de la punctul de pornire. Voi presupune că știm ceea ce este extensiunea unui concept[179].

Dar propoziția:

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este identică cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G"

este adevărată atunci și numai atunci cînd propoziția „conceptului F îi revine același număr ca și conceptului G"

este de asemenea adevărată. Așadar, avem aici o concordanță deplină.

Desigur, nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător decît un altul în sensul în care extensiunea unui concept este mai cuprinzătoare decît extensiunea altuia; dar este de asemenea exclus cu desăvîrșire ca

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" să fie mai cuprinzătoare decît

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G". Dimpotrivă, cînd toate conceptele echinumerice cu conceptul G sînt echinumerice și cu conceptul F, atunci, invers, toate conceptele echinumerice cu conceptul F sînt echinumerice și cu conceptul G. În accepția de aici, „mai cuprinzător" nu trebuie confundat cu „mai mare", care are loc în cazul numerelor.

Desigur, se mai poate concepe și cazul în care extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este mai cuprinzătoare sau mai puțin cuprinzătoare decît extensiunea unui alt concept, iar aceasta din urmă, potrivit definiției noastre, nu poate fi un număr; deși nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător sau mai puțin cuprinzător decît extensiunea unui concept, nimic nu ne împiedică să adoptăm această terminologie, dacă ar fi cazul.

Completare și atestare a definiției noastre

§ 70. Definițiile se atestă prin rodnicia lor. Cele ce ar putea fi lăsate la fel de bine la o parte fără a se afecta prin aceasta mersul demonstrației trebuie abandonate ca fiind absolut fără valoare.

Să vedem, aşadar, dacă din definiţia pe care am dat-o numărului ce revine conceptului F se pot deriva proprietăţi cunoscute ale numerelor. În cele de faţă, ne vom limita la proprietăţile cele mai simple.

În acest scop, se impune să analizăm cu mai multă minuţie echinumericitatea. Noi am definit-o prin intermediul corespondenţei biunivoce iar acum trebuie explicat modul în care înţeleg această expresie, întrucît, aşa cum se poate bănui cu uşurinţă, ea conţine un element intuitiv[180].

Să luăm următorul exemplu. Cînd un chelner vrea să fie sigur că va pune pe masă tot atîtea cuţite cîte farfurii, el nu are nevoie să numere nici cuţitele, nici farfuriile; este de ajuns să pună în dreapta fiecărei farfurii un cuţit şi să aibă grijă ca fiecare cuţit de pe masă să se afle la dreapta unei farfurii. Farfuriile şi cuţitele sînt astfel corelate biunivoc între ele, pe baza uneia şi aceleiaşi relaţii poziţionale. Dacă gîndim că în propoziţia

„α este aşezat imediat la dreapta lui A",

α şi A sînt înlocuite mereu prin alte şi alte obiecte, atunci acea parte a conţinutului care rămîne neschimbată în cursul acestei operaţii constituie esenţa relaţiei. Acum să generalizăm.

Atunci cînd dintr-un conţinut judicabil care priveşte un obiect *a* şi un obiect *b* lăsăm la o parte pe *a* şi pe *b*, ceea ce ne rămîne este un concept de relaţie care, de aceea, este completabil într-un îndoit mod. Dacă din propoziţia

„Pămîntul este mai greu decît Luna"

detaşăm „Pămîntul", obţinem conceptul „mai greu decît Luna". Dacă, dimpotrivă, detaşăm „Luna", dobîndim conceptul „mai uşor decît Pămîntul". Dacă le lăsăm la o parte pe ambele, ceea ce rămîne este un concept de relaţie care, luat în sine, are tot atît de puţin sens ca şi conceptul simplu: el reclamă întotdeauna o completare spre a forma un conţinut judicabil. Dar completarea se poate perfecta în diferite moduri: în locul Pămîntului şi Lunei

eu pot pune, de exemplu, Soarele și Pămîntul, și tocmai prin aceasta se creează posibilitatea detașării[181].

Diferitele perechi individuale de obiecte corelate se raportează la conceptul de relație în același fel — am putea spune, ca subiecte — în care obiectul individual se raportează la conceptul căruia i se subsumează. Aici, subiectul este compus. Uneori, cînd relația este convertibilă, această trăsătură capătă o expresie lingvistică, cum se întîmplă în propoziția „Peleu și Thetis erau părinții lui Ahile"*. Dimpotrivă, ar fi imposibil să redăm, de exemplu, conținutul propoziției „Pămîntul este mai greu decît Luna", astfel încît „Pămîntul și Luna" să apară ca subiect compus, întrucît particula „și" indică întotdeauna o echivalare sub un raport determinat. Dar aceasta nu afectează cu nimic fondul chestiunii.

Conceptul de relație aparține, așadar, la fel ca și conceptul simplu, logicii pure. Aici nu intră în considerație conținutul particular al relației, ci numai forma logică. Adevărul oricărei enunțări despre aceasta din urmă este analitic și cunoscut *a priori*[182]. Lucrul este valabil pentru conceptele de relație la fel ca pentru celelalte.

După cum

„*a* cade sub conceptul F"

este forma generală a unui conținut judicabil raportat la un obiect *a*, tot astfel putem considera

„a stă în relația φ față de *b*"

ca formă generală pentru un conținut judicabil referitor la obiectul *a* și obiectul *b*[183].

§ 71. Dacă fiecare obiect subsumat conceptului F se află în relația φ față de un obiect subsumat conceptului G și dacă pentru fiecare obiect de sub G avem un obiect de sub F ce stă în relația φ față de primul, atunci, obiec-

* Nu trebuie să confundăm acest caz cu cel în care „și" leagă numai în aparență subiectele, în timp ce de fapt el leagă două propoziții.

tele de sub F sînt corelate cu cele de sub G prin relația φ[184].

Se mai poate ridica întrebarea: ce semnifică expresia

„fiecare obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G“[185],

în cazul cînd sub F nu cade nici un obiect? Prin aceasta, eu înțeleg faptul că cele două propoziții

„a cade sub F“

și

„*a* nu stă în relația φ față de nici un obiect care cade sub G“[186]

nu pot avea loc amîndouă, indiferent de ceea ce desemnează *a*, așa că sau prima, sau a doua, sau ambele sînt false. De aici rezultă că atunci cînd nu există vreun obiect subsumat lui F[187], „orice obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G“, deoarece în acest caz prima propoziție, și anume

„*a* cade sub F“

trebuie să fie întotdeauna negată, oricare ar fi *a*.

Tot astfel,

„față de fiecare obiect de sub G un obiect de sub F stă în relația ω“[188]

semnifică faptul că cele două propoziții

„*a* cade sub G“

și

„nici un obiect de sub F nu stă în relația φ față de *a*“

nu sînt compatibile, oricare ar fi *a*[189].

§ 72. Am văzut deci în ce condiții obiectele subsumate conceptelor F și G sînt puse în corespondență prin intermediul relației φ. Aici, această corelare trebuie să fie

biunivocă. Prin aceasta, eu înţeleg faptul că următoarele două propoziţii au loc:

1. dacă *d* stă în relaţia φ faţă de *a*, şi dacă *d* stă în relaţia φ faţă de *e*, atunci în mod general, pentru orice *d*, *a* şi *e*, *a* este acelaşi cu *e*;[190]

2. dacă *d* se află in relaţia φ faţă de *a*, şi dacă *b* se află în relaţia φ faţă de *a*, atunci, în mod general, pentru orice *d*, *b* şi *a*, *d* este acelaşi cu *b*[191].

Prin aceasta noi am redus corespondenţa biunivocă la relaţii pur logice şi putem acum defini:

Expresia

„conceptul F este echinumeric cu conceptul G"

are aceeaşi semnificaţie ca expresia

„există o relaţie φ care corelează biunivoc obiectele care cad sub conceptul F cu obiectele care cad sub conceptul G"[192].

Repet definiţia iniţială:

numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F"[193]

şi adaug:

expresia

„*n* este un număr"

are aceeaşi semnificaţie ca expresia

„există un concept astfel încît *n* este numărul care îi revine"[194].

Conceptul de număr a fost aşadar definit şi deşi în aparenţă a fost definit prin el însuşi, în realitate nu s-a comis vreo eroare, întrucît „numărul care revine conceptului F" a fost în prealabil definit.

§ 73. În continuare, vrem să arătăm că numărul care revine conceptului F este identic cu numărul care revine

conceptului G atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G[195]. Deși această afirmație pare a fi pur tautologică, în realitate lucrurile nu stau așa, întrucît semnificația cuvîntului „echinumeric" nu derivă din semnificația părților componente, ci din definiția dată mai sus.

Conform definiției noastre trebuie să arătăm că extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este aceeași cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G", atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G[196]. Cu alte cuvinte: trebuie demonstrat că, admițînd ipoteza, următoarele propoziții sînt valabile în mod general:

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul F, atunci el este echinumeric și cu conceptul G;

și

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul G, atunci el este echinumeric și cu conceptul F[197].

Prima propoziție revine la faptul că există o relație care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul G în cazul cînd există o relație φ care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G și cînd există o relație ψ care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul F[198]. Faptul devine mai transparent dacă ordonăm literele după cum urmează:

$$H\psi F\varphi G.$$

O asemenea relație poate fi introdusă realmente: ea rezidă în conținutul

„există un obiect care se află față de *c* în relația ψ și față de *b* în relația φ"

atunci cînd detașăm *c* și *b* (adică le privim ca puncte ale relației). Se poate arăta că această relație este biuni-

vocă și că ea corelează obiectele subsumate conceptului H cu obiectele subsumate conceptului G[199].

În mod similar, poate fi demonstrată și cealaltă propoziție"*. Sperăm că aceste indicații vor fi suficiente pentru a se admite că nu avem nevoie să împrumutăm de la intuiție vreun temei demonstrativ și că definițiile noastre pot fi utile.

§ 74. Putem trece acum la definirea fiecărui număr în parte.

Întrucît conceptului „neidentic cu sine" nu i se subsumează nimic, voi defini:

0 este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine"[201].

S-ar putea ca cineva să fie șocat de faptul că eu vorbesc aici despre un concept. Poate ni se va obiecta că aici este o contradicție, și că aceasta amintește de vechile noastre cunoștințe — fierul de lemn și cercul pătrat. În fapt, eu cred că acestea din urmă nu sînt chiar atît de nocive cum s-a spus. Ce-i drept, ele nu vor avea nicidecum o utilitate; dar, în același timp, ele nu pot nici să cauzeze vreun rău, dacă nu presupunem că li se subsumează ceva; or, simpla întrebuințare a conceptului nu atrage după sine această presupunere. Nu întotdeauna faptul că un concept conține o contradicție este atît de evident încît să nu reclame o investigație; pentru aceasta trebuie să avem mai întîi acel concept și să-l tratăm logic. Tot ce i se poate cere unui concept din punctul de vedere al logicii și avînd în vedere rigoarea demonstrației este delimitarea sa precisă, astfel încît pentru fiecare obiect să se poată determina dacă acesta cade sau nu sub concept. Amintita exigență este satisfăcută întru totul de conceptele care conțin o contradicție, cum este conceptul „ne-

---

* La fel și reciproca acesteia: dacă numărul care revine conceptului F este același cu numărul care revine conceptului G, atunci conceptul F este echinumeric cu conceptul G[200].

identic cu sine"; într-adevăr, despre orice obiect noi știm că nu cade sub un atare concept*[202].

Eu folosesc cuvîntul „concept" astfel încît

„*a* cade sub conceptul F"

este forma generală a unui conținut judicabil care se referă la un obiect *a* și care rămîne judicabil orice am pune pentru *a*[204]. Iar în acest sens

„*a* cade sub conceptul «neidentic cu sine»"

înseamnă același lucru ca

„*a* este neidentic cu sine"

sau

„*a* nu este identic cu *a*"[205].

În vederea definirii lui 0 aș fi putut lua orice alt concept sub care nu cade nimic. Pe mine mă interesa însă să aleg un concept despre care aceasta să se poată demonstra în mod pur logic; or, „neidentic cu sine" se recomandă în mod firesc ca cel mai convenabil în acest scop; pentru „identic" am adoptat definiția lui Leibniz, introdusă mai sus, definiție care este pur logică[206].

* Cu totul altceva este definiția unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează. Expresia „cea mai mare fracție subunitară", de exemplu, nu are un conținut, deoarece articolul hotărît pretinde indicarea unui obiect determinat. Dimpotrivă, conceptul „fracție mai mică decît 1 și astfel încît nici o fracție mai mică decît 1 nu e mai mare ca ea" este la adăpost de orice obiecții și, pentru a putea să demonstrăm că nu există o asemenea fracție, trebuie să recurgem la însuși acest concept, deși el conține o contradicție. Dacă am vrea însă să definim pe baza acestui concept un obiect care cade sub el ar fi necesar, desigur, să arătăm în prealabil două lucruri diferite:

1. că sub acest concept cade un obiect;
2. că sub el cade numai un obiect.

Întrucît însă prima dintre aceste propoziții este din capul locului falsă, expresia „cea mai mare fracție subunitară" este lipsită de sens[203].

§ 75. Pe baza stipulărilor anterioare se poate demonstra acum că orice concept sub care nu cade nimic este echinumeric cu orice concept sub care nu cade nimic, și numai cu un asemenea concept[207]; de aici urmează că 0 este numărul care revîne unui asemenea concept și că nici un obiect nu cade sub un concept căruia îi revine numărul 0[208].

În ipoteza că nici un obiect nu se subsumează conceptului F și nici conceptului G, va trebui să apelăm, spre a demonstra echinumericitatea, la o relație φ pentru care sînt valabile propozițiile:

Orice obiect subsumat lui **F** stă în relația φ cu un obiect subsumat lui G; cu orice obiect subsumat lui G un obiect subsumat lui **F** stă în relația φ.

Conform celor spuse înainte despre semnificația expresiei de mai sus, în ipotezele asumate, orice relație respectivă satisface aceste condiții; identitatea care, în plus, este biunivocă, le satisface și ea. Într-adevăr, cele două cerințe stipulate anterior sînt îndeplinite.

Dacă, dimpotrivă, sub G cade un obiect, de exemplu *a*, în timp ce sub **F** nu cade nici unul, atunci amîndouă propozițiile

„*a* cade sub G"

și

„nici un obiect care cade sub **F** nu stă față de *a* în relația φ"

sînt compatibile pentru orice relație φ; într-adevăr, prima propoziție este adevărată conform primei ipoteze, iar a doua este adevărată conform celei de-a doua ipoteze. Căci dacă nu există vreun obiect subsumat lui **F**, atunci nu există nici un obiect de acest gen care să stea față de *a* într-o relație oarecare. Așadar, nu există nici o relație care, potrivit definiției noastre, să coreleze obiectele subsumate lui **F** cu cele subsumate lui G și, ca atare, conceptele F și G nu sînt echinumerice[209].

§ 76. Voi defini acum relaţia în care stau doi membri vecini oarecari ai şirului numerelor naturale. Propoziţia

„există un concept F şi un obiect *x* ce i se subsumează astfel încît numărul ce revine conceptului F este *n* şi numărul ce revine conceptului «subsumat lui F dar nu identic cu x» este *m*",

înseamnă acelaşi lucru ca

„*n* succede imediat lui *m* în şirul numerelor naturale"[210].

Evit expresia „*n* este *succesorul* imediat al lui m", întrucît justificarea articolului hotărît ar reclama demonstrarea prealabilă a două propoziţii*. Din acelaşi motiv, eu încă nu ajung să spun aici „n = m + 1", căci prin însăşi utilizarea semnului identităţii (*m*+1) este desemnat ca obiect.

§ 77. Spre a ajunge acum la numărul 1 trebuie în primul rînd să arătăm că există ceva ce succede imediat lui 0 in şirul numerelor naturale[211].

Să considerăm conceptul — sau, dacă preferăm, predicatul — „identic cu 0". Acestui concept i se subsumează numărul 0. Conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0", din contra, nu i se subsumează vreun obiect, astfel încît numărul ce revine acestui concept este 0. Avem deci un concept, „identic cu 0", şi un obiect, 0, ce i se subsumează, despre care au loc:

numărul ce revine conceptului „identic cu 0" este identic cu numărul ce revine conceptului „identic cu 0"; numărul ce revine conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0" este numărul 0.

În consecinţă, conform definiţiei noastre, numărul ce revine conceptului „identic cu 0" succede imediat lui 0 în şirul numerelor naturale.

---

* A se vedea nota de la p. 124.

Dacă definim acum:

1 este numărul ce revine conceptului „identic cu 0", ultima propoziție o putem exprima astfel:

1 succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale[212].

Poate că nu este inutil să observăm că definiția lui 1 nu presupune, în vederea justificării sale obiective, un fapt observat*; într-adevăr, necesitatea satisfacerii anumitor condiții subiective pentru ca definiția să devină pentru noi posibilă se confundă lesne cu faptul că percepțiile senzoriale ne sugerează definiția în cauză**. Chiar dacă ar fi așa, propozițiile derivate nu încetează a fi apriorice. Printre asemenea condiții se numără, de exemplu, și faptul că o cantitate suficientă de sînge avînd compoziția adecvată irigă creierul — cel puțin, după cîte știm; dar adevărul ultimei noastre propoziții este independent de aceasta; el continuă să subziste chiar și atunci cînd faptul menționat nu mai are loc[213]; și chiar dacă ar fi ca toate ființele raționale să se cufunde vreodată într-un somn hibernal, adevărul propozițiilor nu ar fi suprimat în tot acest timp, ci ar rămîne absolut intact. Adevărul unei propoziții nu rezidă în faptul că aceasta din urmă este gîndită[214].

§ 78. Voi enumera aici unele propoziții care se demonstrează prin intermediul definițiilor noastre. Cititorul va sesiza cu ușurință cum se pot efectua demonstrațiile.

1. Dacă a succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale, atunci $a=1$[215].

2. Dacă 1 este numărul care revine unui concept, există un obiect subsumat acestuia din urmă[216].

3. Dacă 1 este numărul ce revine unui concept F, dacă obiectul x se subsumează conceptului F și dacă y se subsumează conceptului F, atunci $x = y$; cu alte cuvinte, x este atunci același cu y[217].

---

* O propoziție non-generală.

** Cf. B. ERDMANN, *Die Axiome der Geometrie*, p. 164.

4. Dacă unui concept F i se subsumează un obiect şi dacă din faptul că x se subsumează conceptului F şi y se subsumează conceptului F se poate infera în mod general că $x = y$, atunci numărul ce revine conceptului F este 1[218].

5. Relaţia lui m faţă de n instituită prin intermediul propoziţiei:

„n succede imediat lui m în şirul numerelor naturale"

este o relaţie biunivocă[219].

Prin aceasta încă nu se afirmă că pentru fiecare număr există un altul care îi succede imediat sau căruia îi succede imediat în şirul numerelor naturale.

6. Orice număr cu excepţia lui 0 succede imediat unui număr în şirul numerelor naturale[220].

§ 79. Acum, pentru a fi în măsură să demonstrăm că fiecărui număr (n) din şirul numerelor naturale îi succede imediat un număr[221], trebuie să indicăm un concept căruia acesta din urmă îi revine. Vom alege în această calitate

„element al şirului de numere naturale terminat cu n", concept pe care va trebui mai întîi să-l definim.

Voi începe prin a repeta cu unele modificări de formulare definiţia succesiunii într-un şir, pe care am dat-o în lucrarea mea *Begriffsschrift*.

Propoziţia

„dacă orice obiect faţă de care x stă în relaţia φ cade sub conceptul F, şi dacă din faptul că d cade sub conceptul F urmează în mod general, pentru orice d, că orice obiect faţă de care d stă în relaţia φ cade sub conceptul F, atunci, oricare ar fi conceptul F, y cade sub F"

înseamnă acelaşi lucru ca

„y succede în φ — şir lui x"

şi ca

„x precede în φ — şir lui y"[222]

§ 80. Referitor la aceasta nu va fi de prisos să facem unele observații. Întrucît nu am definit relația φ, șirul nu trebuie conceput neapărat în forma unei ordonări spațiale sau temporale, deși aceste cazuri nu sînt excluse[223].

S-ar putea considera, eventual, că o altă definiție este mai naturală, de exemplu următoarea: dacă pornind de la x ne îndreptăm permanent atenția de la un obiect la un altul față de care primul stă în relația φ, și dacă în acest mod se ajunge în cele din urmă la y, spunem că y succede în φ—șir lui x.

Acesta este un mod de a aborda problema, nu o definiție. Atingerea lui y prin deplasarea atenției noastre poate depinde de diverse circumstanțe subiective, de exemplu de timpul de care dispunem sau de stadiul cunoașterii noastre. Faptul că y succede lui x în cadrul φ —șirului nu are în genere nimic de-a face cu atenția noastră și cu condițiile dirijării ei, ci ține de natura lucrului însuși, tot așa cum frunza verde reflectă anumite raze de lumină, indiferent dacă ele cad sau nu pe retina ochiului meu și suscită ori nu o senzație, sau tot așa cum un grăunte de sare este solubil în apă, indiferent dacă l-am aruncat ori nu în apă, și indiferent dacă am observat ori nu fenomenul respectiv, rămînînd solubil chiar dacă nici nu am posibilitatea să fac vreo experiență în acest sens[224].

Definiția mea permite deplasarea problemei din domeniul posibilităților subiective în domeniul determinării obiective. Într-adevăr, faptul că din anumite propoziții decurge o altă propoziție este ceva obiectiv, ce nu depinde de legile mișcării atenției noastre și în raport cu care este indiferent dacă noi efectuăm într-adevăr respectivul raționament. Avem aici un criteriu universal de soluție a problemei, acolo unde ea poate fi pusă, chiar dacă în anumite cazuri dificultățile exterioare ne-ar putea împiedica să evaluăm soluția. Aceasta nu are nimic de-a face cu esența chestiunii[225].

Nu întotdeauna se cere să parcurgem toți termenii șirului începînd cu termenul inițial și pînă la un anumit

obiect, pentru a căpăta certitudinea că acesta din urmă este succesorul primului. Dacă, de exemplu, se dă că în cadrul φ—șirului *b* succede lui *a* și *c* lui *b*, atunci, conform definiției noastre, putem trage concluzia că *c* succede lui *a* fără a mai fi măcar nevoie să cunoaștem termenii intermediari[226].

Numai pe baza acestei definiții a succederii într-un șir devine posibil să reducem la legile generale ale logicii raționamentul de la *n* la (*n* + 1), raționament care, în aparență, este specific matematicii[227].

§ 81. Dacă în calitate de relație φ avem acea relație în care *m* este pus față de *n* prin propoziția

„*n* succede imediat lui *m* în șirul numerelor naturale",

atunci, în loc de „φ—șir" spunem „șir al numerelor naturale".

Mai departe, definesc:

propoziția

„*y* succede în φ-șir lui *x*, sau *y* este identic cu *x*" înseamnă același lucru ca

„*y* aparține φ—șirului care începe cu *x*"

și ca

„x aparține φ—șirului care se termină cu *y*".

În consecință, *a* aparține șirului de numere naturale terminat cu *n* atunci cînd *n* succede lui *a* în șirul numerelor naturale sau cînd el este identic cu *a**.

§ 82. Acum trebuie să arătăm că — dacă o anumită condiție, care nu a fost încă stipulată, este satisfăcută — numărul ce revine conceptului

„membru al șirului de numere naturale terminat cu *n*"

succede imediat lui *n* în șirul numerelor naturale[228]. Dar

---

* Atunci cînd *n* nu este un număr, numai *n* însuși aparține șirului de numere naturale care se termină cu *n*. Acest mod de exprimare nu trebuie să ne contrarieze!

prin aceasta a rezultat că există un număr care succede imediat lui *n* în șirul numerelor naturale, și deci că nu există un membru ultim al acestui șir. Evident, această propoziție nu poate fi întemeiată în mod empiric sau prin inducție[229].

Prezentarea demonstrației înseși ne-ar duce prea departe. Ne vom mărgini să schițăm mersul ei. Trebuie demonstrat că:

1. dacă *a* este succesor imediat al lui *d* în șirul numerelor naturale și dacă pentru *d* avem:

numărul ce revine conceptului
„membru al șirului de numere naturale terminat cu *d*"

succede imediat lui *d* în șirul numerelor naturale,

atunci avem pentru *a:*

numărul ce revine conceptului
„membru al șirului de numere naturale terminat cu *a*"
succede imediat lui *a* în șirul numerelor naturale.

În al doilea rînd, trebuie demonstrat că pentru 0 are loc ceea ce s-a enunțat în propozițiile formulate mai sus cu privire la *d* și la *a;* pe această bază vom conchide că aceasta are loc și pentru *n,* dacă *n* aparține șirului de numere naturale ce începe cu 0[230]. Acest mod de raționare este o aplicare a definiției pe care am dat-o expresiei

„*y* succede lui *x* în șirul numerelor naturale",

atunci cînd in calitate de concept F a fost luat acel enunț comun[231] despre *d* și *a,* în care *0* și *n* iau locul lui *d* și *a.*

§ 83. Spre a demonstra propoziția (1) din secțiunea precedentă, trebuie să arătăm că *a* este numărul ce revine conceptului „membru al șirului de numere naturale terminat cu *a,* dar nu identic cu *a*"[232]. Pentru aceasta trebuie mai întîi să demonstrăm că acel concept are o extensiune identică cu aceea a conceptului „membru al șirului de nu-

mere naturale terminat cu *d*"[233]. În acest scop, avem nevoie de propoziția că nici un obiect care aparține șirului de numere naturale ce începe cu 0 nu poate fi propriul lui succesor în cadrul șirului numerelor naturale[234]. Aceasta trebuie să se demonstreze tot prin intermediul definiției pe care am dat-o succederii într-un șir, așa cum s-a indicat mai sus*.

Sîntem astfel obligați să atașăm o condiție propoziției ce afirmă că numărul ce revine conceptului

„membru al șirului de numere naturale terminat cu *n*" succede imediat lui *n* în șirul numerelor naturale, și anume condiția că *n* aparține șirului de numere naturale ce începe cu 0. În acest scop dispunem de un mod de exprimare mai succint, pe care îl definesc astfel:

Propoziția

„*n* este un membru al șirului de numere naturale începînd cu 0"

are aceeași semnificație ca

„*n* este un număr finit".

Atunci putem formula propoziția de mai sus după cum urmează: nici un număr finit nu este propriul său succesor în șirul numerelor naturale[235].

Numere infinite

§ 84. Pe lîngă numerele finite avem numerele infinite[237]. Numărul care revine conceptului „număr finit" este un număr infinit[238]. Să-l notăm, de exemplu, prin

---

* La p. 63, *op. cit.*, E. Schröder pare să considere această propoziție ca o consecință a unui mod de desemnare care poate să difere de cel de față. Aici se manifestă neajunsul care afectează întreaga sa prezentare a chestiunii, și anume că de fapt nu știm dacă numărul este un semn — iar în acest caz, care este semnificația sa — sau dacă numărul este tocmai această semnificație a semnului. Din simplul fapt că instituim semne diferite în așa fel încît nici unul să nu se repete, nu urmează că aceste semne desemnează efectiv lucruri diferite[236].

∞_1. Dacă ar fi finit, el nu ar putea fi propriul său succesor imediat în șirul numerelor naturale. Or, se poate arăta că pentru ∞_1 tocmai acesta este cazul.

Numărul infinit ∞_1 astfel definit nu conține nimic misterios sau miraculos. „Numărul care revine conceptului F este ∞_1" nu înseamnă acum nimic mai mult sau mai puțin decît: există o relație care pune obiectele subsumate conceptului F în corespondență biunivocă cu numerele finite. Potrivit definițiilor noastre, condiția are un sens pe deplin clar și neechivoc; aceasta este suficient pentru a justifica utilizarea semnului ∞_1 și a-i garanta o semnificație. Faptul că nu ne putem forma vreo reprezentare despre un număr infinit nu are nici o importanță; nu altfel se întîmplă și cu numerele finite. Numărul nostru ∞_1 este astfel tot atît de determinat ca orice număr finit: el este recognoscibil ca atare fără putință de dubiu și poate fi distins de orice alt număr[239].

§ 85. Recent, G. Cantor a introdus într-o lucrare remarcabilă* numere infinite[240]. Împărtășesc pe deplin aprecierea pe care el o dă concepției care în genere nu acceptă ca avînd realitate decît numerele finite. Nici aceste numere, nici fracțiile, nici numerele negative, iraționale și complexe nu pot fi percepute senzorial și nu au caracter spațial; iar dacă spunem că actualitate are numai ceea ce acționează asupra simțurilor sau, cel puțin, comportă efecte ce pot avea drept urmări mai apropiate sau mai îndepărtate percepții senzoriale, atunci desigur că aceste numere nu au actualitate[241]. Dar teoremele noastre nu pretind nicidecum asemenea percepții în calitate de temeiuri demonstrative. În investigațiile noastre putem utiliza fără ezitare un nume sau semn introdus ireproșabil din punct de vedere logic, și deci numărul nostru este tot atît de justificat ca și numărul doi sau numărul trei.

---

* *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

Cred că în această privință sînt de acord cu Cantor, dar terminologia mea diferă întrucîtva de a lui. Ceea ce eu numesc număr, el numește „putere“, în timp ce conceptul său* de număr se referă la ordonare. În cazul numerelor finite independența față de succesiunea în cadrul șirului este incontestabilă, dar nu același este cazul numerelor transfinite[242]. Or, folosirea cuvîntului „număr“ și a intrebării „cît de mulți?“ nu trimite la vreo ordine determinată. Numărul lui Cantor răspunde mai curînd întrebării „al cîtelea membru al succesiunii este membrul ultim?“. Ca urmare, cred că denumirea pe care o folosesc concordă în mai mare măsură cu uzanța lingvistică. Atunci cînd extindem semnificația unui cuvînt, trebuie să avem în vedere ca un număr cît mai mare de propoziții generale să rămînă valabile, și mai cu seamă principii atît de esențiale cum este, în cazul numărului, independența față de poziția în cadrul unui șir. Nu a trebuit să apelăm la o extindere, întrucît conceptul nostru de număr cuprinde din capul locului și numere infinite.

§ 86. Spre a obține numerele sale infinite, Cantor introduce conceptul relației de succesiune în cadrul unei consecuții, concept care diferă de conceptul meu de „succesiune într-un șir“[243]. De exemplu, după Cantor, apare o consecuție atunci cînd ordonăm numerele întregi pozitive finite, astfel încît cele impare să se succeadă în ordinea lor naturală și tot astfel cele pare, și totodată stipulăm că orice număr par trebuie să urmeze oricărui număr impar. În această consecuție, de exemplu, 0 ar succede lui 13. În schimb, nici un număr nu l-ar precede imediat pe 0. Acesta este doar unul din cazurile ce nu pot surveni în succesiunea în cadrul unui șir definită de mine. Se poate demonstra riguros, fără a apela la vreo axiomă a intuiției, că dacă y este un succesor al lui x în cadrul unui q-șir, există un obiect care îl pre-

* Această expresie ar putea părea să contrazică obiectivitatea conceptului, pe care am evidențiat-o în cele de mai sus; dar în cazul de față, subiectivă este numai denumirea.

cede imediat pe y în cadrul acestui şir. După părerea mea, încă nu avem o definiţie precisă a succesiunii într-o consecuţie şi a numărului cantorian. Cantor se referă la o „intuiţie interioară“ misterioasă, acolo unde ar trebui să căutăm o demonstraţie pe bază de definiţii, demonstraţie pe deplin posibilă[244]. Într-adevăr, eu cred a întrezări modul în care pot fi definite conceptele respective. — În nici un caz, nu vreau ca prin observaţiile făcute să pun în cauză justificarea şi rodnicia acestor concepte. Dimpotrivă, salut în aceste investigaţii o lărgire a hotarelor ştiinţei, şi îndeosebi faptul că ele au deschis un drum pur analitic către numerele (puterile) transfinite de ordin superior[245].

V. Încheiere[246]

§ 87. Sper că în această scriere am reuşit să fac plauzibil[247] faptul că legile aritmetice sînt judecăţi analitice şi deci *a priori*. Potrivit acestui punct de vedere, aritmetica ar fi numai o logică mai elaborată, orice propoziţie aritmetică fiind o lege logică, deşi una derivată[248]. Aplicaţiile aritmeticii în explicarea naturii ar reprezenta prelucrări logice ale unor fapte observate*; a calcula ar însemna a raţiona. Legile numărului nu pretind — aşa cum crede Baumann** — o verificare practică, pentru a fi aplicabile în cadrul lumii exterioare; într-adevăr, în lumea exterioară, a totului spaţial, nu există concepte, proprietăţi ale conceptelor, numere[249]. Aşadar, legile numărului nu sînt propriu-zis aplicabile la lucrurile exterioare, ele nu sînt legi ale naturii. În schimb, ele sînt pe deplin aplicabile la judecăţi privitoare la lucrurile lumii exterioare: ele sînt legi ale legilor naturii. Ele afirmă nu o conexiune între fenomene naturale, ci o conexiune între judecăţi; or, în rîndul acestora din urmă se află şi legile naturii[250].

* Observarea însăşi înglobează deja o anumită activitate logică.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 670.

§ 88. Kant* a subapreciat în mod evident valoarea judecăţilor analitice — şi aceasta ca urmare a unei determinări prea înguste a conceptului în cauză, deşi se pare că el a întrezărit conceptul mai larg pe care îl utilizăm în cele de faţă**. Dacă pornim de la definiţia lui, împărţirea judecăţilor în analitice şi sintetice nu este exhaustivă. Ceea ce are el în vedere este cazul judecăţii universale afirmative. Dacă ne referim la aceasta, putem vorbi despre un concept-subiect şi ne putem întreba dacă conceptul-predicat este cuprins, potrivit definiţiei sale, în primul. Ce se întîmplă însă atunci cînd subiectul este un obiect singular? Sau ce se întîmplă atunci cînd avem o judecată existenţială? În acest caz nici nu mai putem vorbi despre un concept-subiect în sensul de mai sus. Kant pare a înţelege conceptul ca determinat prin notele ce-i revin; acesta este însă cel mai steril mod de constituire a conceptelor. Dacă aruncăm o privire asupra definiţiilor introduse mai sus, nu vom găsi nici una de acest gen. Acelaşi lucru se poate spune şi despre definiţiile cu adevărat fecunde din matematică, de exemplu despre definiţia continuităţii unei funcţii. Ea nu ne oferă o serie de note asociate, ci o combinare mai intimă — aş spune, mai organică — a determinărilor. Deosebirea poate fi intuită prin intermediul unei ilustrări geometrice. Dacă reprezentăm conceptele (sau extensiunile acestora) prin regiuni ale unui plan, conceptului definit pe baza notelor asociate îi va corespunde regiunea comună tuturor regiunilor acestor note; conceptul va fi cuprins prin părţi ale delimitărilor acestora. În cazul unei asemenea definiţii problema constă, aşadar, — vorbind la figurat — în a utiliza într-un mod inedit liniile date în prealabil spre a delimita astfel o anumită regiune***. Dar în acest caz nu iese la iveală ceva esenţial nou. Definiţiile mai fe-

---

* *Loc. cit.*, III, p. 39 şi urm.[251].

** La p. 43 el afirmă că o propoziţie sintetică poate fi privită potrivit principiului contradicţiei numai atunci cînd o altă propoziţie sintetică este presupusă[252].

*** Şi la fel atunci cînd notele sînt legate prin „sau“.

cunde ale conceptelor trasează linii de demarcație care nu au fost date în prealabil. Ceea ce se poate infera pe baza lor nu poate fi întrevăzut cu anticipație; nu ne mărginim să scoatem din sertar ceea ce pusesem acolo în prealabil. Consecințele pe care le tragem lărgesc cunoștințele noastre și, prin urmare, potrivit lui Kant, trebuie considerate ca sintetice; nu mai puțin însă, ele pot fi demonstrate pur logic și ca atare sînt analitice. În fapt, ele sînt cuprinse în definiții, dar așa cum planta se află în sămînță, nu așa cum podul se află într-o casă. Adesea, demonstrația unei propoziții reclamă mai multe definiții și deci propoziția respectivă nu este conținută în vreuna din ele, însă decurge în mod pur logic din toate la un loc[253].

§ 89. Mă văd obligat să contest și valabilitatea universală a afirmației lui Kant* potrivit cu care, fără sensibilitate nici un obiect nu ne poate fi dat[254]. Zero, unu sînt obiecte care nu pot să ne fie date într-un mod sensibil. Pînă și acei ce consideră că numerele mai mici sînt sensibil intuitive vor trebui să admită că nici un număr mai mare ca $1000^{(1000^{1000})}$ nu le poate fi dat într-un mod intuitiv-sensibil dar că, în pofida acestui fapt, deținem numeroase cunoștințe despre aceste numere. S-ar putea ca termenul „obiect" să fie utilizat de către Kant în vreo altă accepție; dar atunci zero, unu, ca și numărul nostru ∞_1 rămîn inexplicabile; într-adevăr, ele nu sînt concepte și, dealtfel, Kant* pretinde ca pînă și conceptelor să li se atribuie un obiect în cadrul intuiției[255].

Spre a nu mi se reproșa că mă dedau la șicane mărunte la adresa unui geniu către care nu putem privi decît cu admirație recunoscătoare, cred că este cazul să relev și acordul de idei, care are o pondere cu mult mai mare. Pentru a mă referi numai la probleme legate strîns de cele de față, consider că un mare merit al lui Kant rezidă în faptul că el a făcut distincția între judecățile sintetice și analitice. Spunînd că adevărurile geometriei sînt sintetice *a priori*, el a dezvăluit esența lor reală.

---

* *Op. cit.*, III, p. 82.

Acest lucru merită să fie repetat și astăzi, întrucît el continuă adesea să fie ignorat. Deși Kant s-a înșelat în privința aritmeticii, aceasta — după părerea mea — nu știrbește în mod esențial meritele sale. Pentru el, lucrul cel mai important este existența unor judecăți sintetice *a priori;* problema dacă ele survin numai în cadrul geometriei sau survin și inăuntrul aritmeticii are o importanță *mai mică*[256].

§ 90. Nu pretind a fi făcut mai mult decît plauzibilă natura analitică a adevărurilor aritmeticii, deoarece încă mai putem avea dubii asupra faptului dacă demonstrarea lor se bazează integral pe legi pur logice sau dacă nu cumva un temei demonstrativ de alt gen intervine undeva într-un mod insesizabil. Nici indicațiile pe care le-am dat în vederea demonstrării unor propoziții nu vor înlătura întru totul această obiecție; ea poate fi depășită numai printr-un lanț de raționamente fără fisuri, în cadrul căruia fiecare pas să decurgă conform unuia dintre puținele procedee de raționare recunoscute a fi pur logice. Așa se face că pînă acum nu a fost dată nici măcar o singură demonstrație; într-adevăr, matematicianul se declară mulțumit atunci cînd fiecare trecere la o judecată nouă este evident corectă, fără să se mai întrebe dacă această evidență este de natură logică sau intuitivă. Or, un asemenea demers se relevă adesea a fi foarte complex, el echivalînd cu mai multe inferențe simple, în care se mai pot strecura unele elemente provenite din intuiție. Procedîndu-se prin salturi se creează astfel aparența unei multitudini nesfîrșite de tipuri de raționament în matematică; într-adevăr, cu cît sînt mai mari, cu atît salturile pot să reprezinte mai multe combinații de raționamente simple și de axiome ale intuiției. Cu toate acestea, o asemenea trecere ne apare a fi nemijlocit evidentă, fără a mai deveni conștienți de treptele intermediare și, întrucît trecerea nu se prezintă sub forma unui procedeu logic de raționare recunoscut, înclinăm să considerăm această evidență ca avînd o natură intuitivă, iar adevărul concluziei

îl considerăm drept sintetic, pînă și atunci cînd domeniul de validitate debordează în mod vădit granițele intuiției. Urmînd această cale, nu este posibil să delimităm în mod net elementul sintetic, întemeiat pe intuiție, de cel analitic. Totodată, procedînd astfel, nu vom reuși să detașăm în mod cert toate axiomele intuiției, astfel încît fiecare demonstrație matematică să se poată efectua, pornind numai de la aceste axiome, conform legilor logicii[257].

§ 91. Se ridică, de asemenea, necesitatea imperioasă de a evita orice salturi în procesul inferenței. O asemenea exigență este greu de satisfăcut, întrucît operarea pas cu pas este obositoare. Orice demonstrație ceva mai complicată riscă să capete o lungime enormă. Datorită acestui fapt, varietatea excesivă a formelor logice ce-și găsesc expresia în cadrul limbajului îngreunează delimitarea unui ansamblu de moduri de raționament care în același timp să fie suficient în toate cazurile și transparent.

Pentru a diminua această dificultate, am inventat scrierea mea conceptuală. Scopul ei este de a obține o concizie și o claritate sporită a expresiei și de a opera printr-un număr restrîns de forme precise în maniera unui calcul, astfel încît să permită numai pașii conformi unor reguli stipulate odată pentru totdeauna*. În felul acesta, nici o premisă nu se poate strecura neobservată în cadrul demonstrației. Astfel, fără să împrumut vreo axiomă de la intuiție, am demonstrat o propoziție** care la prima vedere ar putea fi considerată sintetică și pe care o voi formula aici după cum urmează:

Dacă relația fiecărui element al unui șir față de elementul imediat următor este univocă, și dacă m și y succed lui x în cadrul acestui șir, atunci sau y precede lui m în acest șir, sau coincide cu el, sau este succesor al lui m[258].

---

* Această scriere trebuie să fie în măsură, totuși, să exprime nu numai forma logică — așa cum este cazul cu simbolismul lui Boole —, ci și un conținut.

** *Begriffsschrift*, Halle, 1879, p. 86. Formula 133.

Această demonstrație ne permite că constatăm că propoziții care extind cunoștințele noastre pot conține judecăți analitice*.

Alte numere

§ 92. Pînă acum ne-am limitat examenul la numerele naturale. Să aruncăm acum o privire și asupra altor genuri de numere, încercînd să aplicăm la acest domeniu mai larg ceea ce am descoperit în cazul domeniului restrîns.

Urmărind să precizeze sensul problemei privind posibilitatea unui număr, Hankel** afirmă: „Numărul nu mai este astăzi un lucru, o substanță care ar exista în afara subiectului cugetător și a obiectelor care îl fac cu putință, un principiu autonom, cum era, bunăoară, la pitagoricieni. Așadar, problema existenței nu poate fi raportată decît la subiectul gînditor sau la obiectele gîndite, obiecte ale căror relații sînt reprezentate de numere. Strict vorbind, imposibil pentru matematician este numai ceea ce e logic imposibil, adică ceea ce se contrazice cu sine. Nu mai trebuie să demonstrăm că numerele care sînt imposibile în acest sens nu pot fi admise. Atunci însă cînd numerele în cauză sînt posibile din punct de vedere logic, cînd conceptul lor este definit în mod clar și distinct și deci fără contradicție, problema de mai sus nu poate consta decît în a ști dacă în domeniul realului

---

* Se va considera că această demonstrație este încă mult prea complicată; iată un dezavantaj pe care, desigur, certitudinea practic absolută de a nu se fi strecurat vreo eroare sau omisiune pare a-l compensa cu prisosință. Pe atunci, ceea ce urmăream era a reduce totul la un număr minim de legi logice cît mai simple cu putință. Din acest motiv, am recurs la un singur mod de inferență[29]. Dar încă de pe atunci am indicat în Prefață (p. VII) că în vederea unei aplicări ulterioare ar fi de dorit să admitem mai multe asemenea moduri. Aceasta o putem face fără a prejudicia coeziunea lanțului de inferențe, ceea ce ne permite să obținem o comprimare considerabilă.

** *Op. cit.*, pp. 6 și 7.

sau al datului intuitiv, al actualului, există un substrat al acestora, dacă există obiecte în care numerele, adică relaţiile intelectuale de genul arătat, îmbracă o aparenţă fenomenală"[260].

§ 93. Prima propoziţie ne face să ne întrebăm dacă, potrivit lui Hankel, numerele există în subiectul cugetător, în obiectele care le ocazionează, sau în ambele. În orice caz, în sens spaţial ele nu sînt nici înăuntrul, nici în afara subiectului, sau a unui oarecare obiect. Dar, fără discuţie, ele sînt în afara subiectului în sensul că nu sînt subiective. În timp ce oricine nu poate simţi decît propria lui durere, propria lui plăcere ori foame, nu poate avea decît propriile sale senzaţii auditive şi vizuale, numerele pot fi obiecte comune pentru mai mulţi şi anume, ele sînt pentru toţi exact aceleaşi[261], nu sînt simple stări interioare mai mult sau mai puţin asemănătoare ale unor persoane diferite. Înţelegînd să raporteze problema existenţei la subiectul care gîndeşte, Hankel pare să o transforme astfel într-o problemă psihologică, ceea ce în nici un caz nu este. Matematica nu se interesează de natura psihicului nostru iar răspunsul pe care îl primesc problemele psihologice, oricare ar fi ele, trebuie să-i fie absolut indiferente[262].

§ 94. Trebuie să obiectăm, de asemenea, şi împotriva ideii că pentru matematician imposibil este numai ceea ce se contrazice cu sine. Un concept este admisibil chiar şi în cazul cînd notele sale definitorii cuprind o contradicţie; singura condiţie este să nu presupunem că sub acest concept cade ceva. Dimpotrivă, faptul că conceptul nu cuprinde vreo contradicţie nu ne permite încă să deducem că ceva i se subsumează. Dealtfel, cum s-ar putea demonstra că un concept nu cuprinde vreo contradicţie? Demonstraţia este departe de a fi întotdeauna evidentă; din faptul că nu întrezărim o contradicţie, nu urmează că efectiv nu există nici o contradicţie, iar definiţia, oricît de clară ar fi, nu oferă garanţii în acest sens.

Hankel demonstrează* că un sistem închis de numere complexe mai general decît cel uzual şi care ar admite toate legile adunării şi înmulţirii conţine o contradicţie. Acest lucru trebuie într-adevăr demonstrat; el nu este imediat evident. Înainte de a se întîmpla aceasta, cineva ar putea totuşi să utilizeze un asemenea sistem de numere spre a ajunge la rezultate uimitoare, a căror justificare nu ar fi mai prejos de aceea pe care o dă Hankel** pentru teoremele despre determinanţi, prin intermediul numerelor alternante; în adevăr, cine ne garantează că nici în conceptul acestora nu este cuprinsă o contradicţie ascunsă? Dar, chiar dacă s-ar putea exclude o asemenea contradicţie în cazul general, pentru un număr arbitrar de unităţi alternante, încă nu ar rezulta că asemenea unităţi există[263]. Or, tocmai de aceasta avem nevoie. Să luăm ca exemplu Propoziţia 18 din Cartea I a *Elementelor* lui Euclid: În orice triunghi latura cea mai mare se opune unghiului mai mare.

Pentru a demonstra aceasta, Euclid duce pe latura mai mare AC un segment AD egal cu latura mai mică AB şi apelează totodată la o construcţie anterioară. Demonstraţla ar eşua dacă un asemenea punct nu ar exista; nu este suficient să nu se fi detectat vreo contradicţie în conceptul „punct pe AC, a cărui distanţă faţă de A este egală cu distanţa lui B faţă de A". Unim acum B cu D. Faptul că o atare dreaptă există, constituie o altă propoziţie pe care se sprijină demonstraţia noastră.

§ 95. Non-contradicţia unui concept poate fi pusă în evidenţă în mod riguros numai dacă demonstrăm că acestui concept i se subsumează ceva. Reciproca ar fi o eroare[264]. Hankel*** o comite atunci cînd afirmă privitor la ecuaţia $x+b=c$:

„Este evident că atunci cînd $b>c$, nu există nici un număr x în şirul 1, 2, 3, . . ., care să rezolve problema res-

* *Op. cit.*, pp. 106—107.
** *Op. cit.*, § 35.
*** *Op. cit.*, p. 5. Similar, E. KOSSAK, *op. cit.*, p. 17 jos.

pectivă: scăderea este în acest caz imposibilă. Nimic nu ne împiedică însă în acest caz să privim diferența (c—b) ca pe un semn care oferă problemei o soluție și cu care putem opera exact ca și cum ar fi un semn numeric din șirul 1, 2, 3, ...".

Și totuși ceva ne împiedică să-l considerăm în mod necondiționat pe (2—3) ca pe un semn care oferă o soluție problemei: într-adevăr, un semn gol nu rezolvă problema; dacă nu are un conținut, semnul nu este decît o pată de cerneală obișnuită sau tipografică pe hîrtie și, ca atare, posedă proprietăți de ordin fizic, dar nu și pe aceea de a da 2, atunci cînd îl adunăm cu 3. Propriu-zis, el nu este un număr iar utilizarea sa în această calitate ar constitui o eroare logică. Chiar și atunci cînd c>b, nu semnul („c—b") este soluția problemei, ci conținutul acestui semn.

§ 96. La fel de bine am putea spune: printre numerele cunoscute pînă acum nu există unul care să satisfacă concomitent ecuațiile

$$x+1=2 \text{ și } x+2=1,$$

însă nimic nu ne împiedică să introducem un semn care soluționează problema. Se va replica: problema conține de data aceasta o contradicție. Incontestabil așa este, dacă cerem ca soluția să fie un număr real sau un număr complex obișnuit; dar de ce nu am extinde sistemul nostru de numere, de ce nu am crea numere care să satisfacă exigențele de mai sus? Vom aștepta pînă cînd cineva ne va indica vreo contradicție! Parcă știe cineva ce posibilități oferă aceste noi numere? Firește, în cazul de mai sus univocitatea scăderii nu va mai putea fi păstrată; dar oare la univocitatea extragerii rădăcinii nu ne vedem obligați să renunțăm, de asemenea, atunci cînd vrem să introducem numerele negative? Iar operarea cu numerele complexe face ca logaritmarea să fie multivocă.

Mergînd mai departe, de ce să nu creăm și numere care permit însumarea șirurilor divergente? Dar nu! Matematicianul poate tot atît de puțin ca și geograful să

creeze ceva în mod arbitrar; nici el nu poate decît să descopere ceea ce este în fapt și să-i dea nume.

Această eroare afectează teoria formală a fracțiilor, a numerelor negative, a numerelor complexe*. Se emite cerința ca regulile de calcul cunoscute să fie păstrate în măsura posibilului pentru numerele ce urmează a fi introduse, iar de aici se deduc proprietăți și relații generale ale acestora. Dacă nu se ajunge nicăieri la vreo contradicție, introducerea noilor numere se consideră justificată, ca și cum nici o contradicție nu se putea strecura pe undeva, sau ca și cum necontradicția ar fi deja existență![265]

§ 97. Ușurința cu care se comite această eroare se datorează faptului că nu s-a trasat o distincție satisfăcătoare între concepte și obiecte. Nimic nu ne împiedică să facem uz de conceptul „rădăcina pătrată din —1"; dar acest simplu fapt nu ne autoriză să folosim articolul hotărît și să considerăm expresia „rădăcina pătrată din —1" ca avînd sens. Dacă admitem că $i^2 = -1$ atunci putem demonstra formula pe baza căreia sinusul unui multiplu al unghiului α se exprimă prin sin α și cos α; dar nu trebuie să uităm că propoziția respectivă presupune condiția $i^2 = -1$, condiție pe care nu o putem pur și simplu omite. Dacă nu ar exista ceva al cărui pătrat să fie —1, egalitatea de mai sus nu ar fi neapărat corectă, în virtutea demonstrației noastre**, deoarece condiția $i^2 = -1$, de care este ținută să depindă valabilitatea egalității, nu ar mai fi satisfăcută. Ar fi ca și cum în cursul unei demonstrații geometrice am apela la o linie auxiliară a cărei trasare este imposibilă.

§ 98. Hankel*** introduce două tipuri de operații, numite de el lytică și tetică, definindu-le prin anumite pro-

* La fel se întîmplă cu cardinalii infiniți ai lui Cantor.

** Deși nu este exclus ca ea să poată fi demonstrată riguros pe o altă cale.

*** *Op. cit.*, p. 18.

prietăţi pe care aceste operaţii trebuie să le satisfacă. Aici nu avem nimic de obiectat, atît timp cît nu se presupune existenţa unor asemenea operaţii şi a unor obiecte ce pot rezulta din ele*. Mai încolo** el notează prin (a+b) o operaţie tetică univocă, asociativă, iar operaţia lytică corespunzătoare, de asemenea univocă, o notează prin (a—b). *O* operaţie? Care însă anume? Una arbitrară? În acest caz, nu avem nicidecum o definiţie pentru (a+b); şi ce se întîmplă dacă nici nu există vreo asemenea definiţie? Dacă cuvîntul „adunare“ nu ar avea încă vreo semnificaţie, ar fi permis din punct de vedere logic să spunem: o operaţie de acest gen o vom numi adunare; dar nu putem spune: o asemenea operaţie trebuie să se numească *adunarea* şi să se noteze prin (a+b), înainte de a fi stabilit că există o asemenea operaţie şi numai una. Nu este permis să utilizăm într-o parte a unei identităţi definitorii articolul nehotărît, iar în cealaltă parte articolul hotărît. Hankel întrebuinţează în continuare expresia „modulul operaţiei“ fără vreo altă precizare, fără să fi arătat că există un modul şi numai unul.

§ **99**. Pe scurt, această teorie pur formală[266] este nesatisfăcătoare. Elementul ei valoros se rezumă la următoarele. Se demonstrează că atunci cînd operaţiile se bucură de anumite proprietăţi, ca asociativitatea şi comutativitatea, anumite propoziţii sînt valabile privitor la ele. Arătîndu-se apoi că adunarea şi înmulţirea pe care le cunoaştem deja au aceste proprietăţi, putem enunţa imediat despre ele propoziţiile respective fără a mai repeta demonstraţia amănunţită în fiecare caz în parte. Abia prin această aplicare la operaţii date în altă parte ajungem la propoziţiile cunoscute ale aritmeticii. În nici un caz nu putem crede însă că această metodă ne-ar permite să introducem adunarea şi înmulţirea. Ceea ce se

---

* Ceea ce în realitate Hankel şi face, întrucît aplică identitatea $\Theta\ (c,\ b)=a$.

** *Op. cit.*, p. 29.

dă este numai un îndreptar pentru definiţiile în cauză, nu înseşi aceste definiţii. Dacă spunem că denumirea de „adunare" trebuie conferită numai unei operaţii tetice univoce şi asociative, prin aceasta operaţia care urmează a se chema astfel nu a fost încă dată. După aceea, nimic nu ne împiedică să numim înmulţirea adunare şi să o notăm prin (a+b), şi nimeni n-ar putea să afirme în mod precis dacă 2+3 fac 5 sau 6.

§ 100. Dacă abandonăm această abordare pur formală, o cale pare a ni se deschide de la sine, graţie faptului că semnificaţia cuvintelor „sumă" şi „produs" se extinde concomitent cu introducerea unor numere noi. Luînd un obiect, — să spunem Luna — vom defini: Luna multiplicată prin ea însăşi este —1. În acest caz, Luna reprezintă pentru noi o rădăcină pătrată din —1.[267] Această stipulare pare a fi permisă, întrucît din semnificaţia de pînă acum a înmulţirii sensul unui asemenea produs nu reiese de la sine şi de aceea el poate fi stabilit în mod arbitrar, prin extinderea acestei semnificaţii. Dar nouă ne mai trebuie şi produsul unui număr real prin rădăcina pătrată din —1. În consecinţă, vom alege intervalul de o secundă în calitate de rădăcină pătrată din —1 şi îl vom nota prin *i*. Vom înţelege atunci prin *3i* intervalul de 3 secunde ş.a.m.d.*. Ce obiect îl vom simboliza atunci, să spunem, prin 2+*3i*? Ce semnificaţie ar urma să fie atribuită în acest caz semnului plus? Ea trebuie stabilită însă în cazul general, ceea ce, desigur, nu va fi uşor de realizat. Dar să admitem deocamdată că am ataşat un sens tuturor semnelor de forma a+b*i*, şi anume un sens pentru care

---

* Cu acelaşi drept am putea alege şi un anumit cuantum de electricitate, o anumită suprafaţă ş.a.m.d. în calitate de rădăcini pătrate din —1, aceste rădăcini diferite urmînd, bineînţeles, să fie notate în mod diferit. Faptul că, după toate aparenţele, putem crea astfel un număr arbitrar de rădăcini pătrate din —1 va fi mai puţin surprinzător dacă ne gîndim că semnificaţia rădăcinii pătrate nu a fost stabilită în mod invariabil înaintea acestor stipulări, ci abia prin intermediul lor[268].

legile cunoscute ale adunării rămîn valabile. Atunci ar urma să stipulăm, în continuare, că în general avem

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc),$$

definind astfel înmulțirea extinsă.

§ 101. Acum, dacă am ști că din egalitatea numerelor complexe decurge egalitatea părților reale, am putea demonstra formula pentru cos ($n\alpha$). Aceasta ar trebui să rezulte din sensul lui $a+bi$, pe care aici l-am luat ca dat din capul locului. Demonstrația ar fi valabilă numai pentru acel sens al numerelor complexe, al sumelor și produselor lor, pe care l-am stipulat deja. Întrucît însă, pentru realul întreg n și realul α, i nu mai apare în cuprinsul ecuației, am putea fi tentați să conchidem: așadar, este absolut indiferent ce anume înseamnă i — o secundă, un milimetru sau orice altceva — atîta timp cît legile noastre pentru adunare și înmulțire sînt valabile, totul depinde numai de acestea; în rest, nu trebuie să ne pese de nimic. Poate că, într-adevăr, putem stabili semnificația lui $a+bi$, a sumei și produsului, în variate moduri, astfel încît propozițiile respective să rămînă valabile; nu este însă indiferent dacă în genere putem găsi un asemenea sens pentru aceste expresii.

§ 102. De multe ori se procedează ca și cum simpla emitere a unei cerințe ar constitui deja propria ei satisfacere. Postulîndu-se că scăderea*, împărțirea, extragerea rădăcinii pot fi efectuate în toate cazurile, se consideră apoi că aceasta este suficient. De ce nu cerem atunci ca și prin trei puncte oarecari să se poată duce întotdeauna o dreaptă? De ce nu cerem ca totalitatea legilor adunării și înmulțirii să fie valabile pentru un sistem tridimensional de numere complexe ca și pentru unul real? Pentru că acest postulat cuprinde o contradicție. Dar dacă este așa, trebuie mai întîi să se demonstreze că și celelalte postulate nu conțin vreo contradicție! Atîta timp cît acest

* Compară KOSSAK, *op. cit.*, p. 17.

dezideratul nu a fost împlinit, rigoarea mult rîvnită rămîne un pur miraj[269].

Într-o teoremă geometrică, liniile auxiliare la care s-a recurs cumva în cadrul demonstrației nu mai apar. Eventual sînt posibile mai multe asemenea construcții auxiliare, de exemplu atunci cînd putem alege un punct în mod arbitrar. Dar, oricît de superfluă ar fi orice linie în parte, forța demonstrației depinde totuși de posibilitatea trasării unei linii cu proprietatea dorită. Simpla postulare nu este suficientă. Tot astfel și în cazul nostru, pentru ca demonstrația să fie convingătoare nu este indiferent dacă „$a+bi$" are un sens sau nu e decît cerneală tipografică. Pentru aceasta nu este de ajuns să cerem ca să aibă un sens, sau să afirmăm că sensul ar fi suma lui *a* și *bi*, dacă în prealabil nu am definit ce înseamnă în cazul de față „sumă" și dacă nu am justificat utilizarea articolului hotărît.

§ 103. Împotriva propunerii noastre de stabilire a sensului lui „i" se pot aduce, desigur, numeroase obiecții. Pe această cale, noi introducem un element cu totul eterogen, timpul, înăuntrul aritmeticii. Secunda nu stă în vreun raport intim cu numerele reale. Propozițiile demonstrate prin intermediul numerelor complexe ar deveni judecăți *a posteriori* sau sintetice dacă nu ar exista un alt gen de demonstrație, sau dacă nu am putea găsi vreun alt sens pentru *i*. În orice caz, ar trebui să încercăm mai întîi să demonstrăm că toate propozițiile aritmeticii sînt analitice.

Cînd Kossak* afirmă privitor la numărul complex: „El este reprezentarea compusă a unor grupuri eterogene de elemente identice"**, s-ar părea că el a reușit astfel să evite introducerea unui lucru străin; dar această aparență se datorează numai impreciziei modului său de expri-

---

* *Op. cit.*, p. 17.

** A se compara privitor la expresia „reprezentare", § 27, privitor la „grup" cele spuse despre „agregat" la §§ 23 și 25, iar privitor la identitatea elementelor §§ 34—39.

mare. Nu ni se explică deloc ce înseamnă propriu-zis $1+i$: este reprezentarea unui măr și a unei pere, sau a durerii de dinți și podagrei? În orice caz, nu poate să însemne concomitent amîndouă, întrucît $1+i$ nu ar fi atunci întotdeauna identic cu $1+i$. Se va spune: semnificația sa depinde de stipularea specială respectivă. Dar dacă este așa, nici propoziția lui Kossak nu ne oferă vreo definiție a numărului complex, ci numai un îndreptar general în acest scop. Ni se cere însă mai mult; trebuie să știm precis ce semnifică „i", iar în cazul cînd, conform îndreptarului de mai sus, am spune că semnifică reprezentarea unei pere — am introduce din nou ceva străin înăuntrul aritmeticii.

În comparație cu propunerile examinate pînă acum, ceea ce se numește de obicei reprezentare geometrică a numerelor complexe[270] are cel puțin avantajul că *1* și *i* nu par a fi complet disparate și eterogene; segmentul considerat ca reprezentant al lui *i* se află într-o relație strictă cu segmentul care îl reprezintă pe 1. Dealtfel, riguros vorbind, nu este corect că aici 1 semnifică un anumit segment, iar *i* un segment perpendicular pe acesta și de lungime egală; din contra, „1" semnifică peste tot același lucru. Un număr complex indică aici modul în care segmentul care îl reprezintă provine dintr-un segment dat (segmentul unitate), prin multiplicare, diviziune și rotație*. Dar, ca și în cazul propunerilor anterioare, orice teoremă a cărei demonstrație se bazează pe existența unui număr complex apare a fi dependentă de intuiția geometrică și deci sintetică.

§ 104. Cum vom introduce, în acest caz, fracțiile, numerele iraționale și cele complexe? Dacă apelăm la ajutorul intuiției, introducem un element străin înăuntrul aritmeticii; dacă însă definim numai conceptul unui asemenea număr prin notele sale, dacă nu pretindem decît ca numărul să satisfacă anumite proprietăți, nimic încă

* Pentru simplitate, fac aici abstracție de incomensurabile.

nu ne garantează că acestui concept i se va subsuma ceva ce satisface exigenţele noastre; or, demonstraţiile noastre trebuie să se sprijine tocmai pe acest fapt[271].

Cum stau însă lucrurile în cazul numărului [natural]? Să fie adevărat că nu avem dreptul să vorbim despre $1000^{(1000^{1000})}$ înainte ca intuiţiei să-i fie date tot atîtea obiecte? Pînă atunci, acesta rămîne un semn gol? — Nicidecum, el are un sens absolut determinat, deşi, din punct de vedere psihologic, este imposibil, chiar dacă ţinem seamă numai de scurtimea vieţii noastre, să aducem în faţa conştiinţei atîtea obiecte*; dar, în pofida acestui fapt, $1000^{(1000^{1000})}$ este un obiect ale cărui proprietăţi le putem cunoaşte, deşi el nu este intuibil[272]. Pentru a ne convinge, ajungem să arătăm, atunci cînd introducem semnul a^n pentru ridicarea la putere, că dacă a şi n sînt numere întregi pozitive, semnul de mai sus exprimă întotdeauna un număr întreg pozitiv şi numai unul. Explicaţia detaliată a felului cum aceasta este cu putinţă ne-ar abate prea mult de la ţinta noastră. În linii mari, calea urmată este indicată de modul în care am explicat în § 74 numărul zero, în § 77 numărul unu şi în § 84 numărul cardinal infinit ∞_1, precum şi de schiţa demonstraţiei că orice număr finit din şirul numerelor naturale are ca succesor imediat un număr (§§ 82 şi 83).

În ultimă instanţă, definiţia fracţiilor, a numerelor complexe ş.a.m.d. va reveni şi ea integral la descoperirea unui conţinut judicabil care poate fi transformat într-o identitate ai cărei membri vor fi tocmai aceste numere noi. Altfel spus: trebuie să stipulăm sensul unei judecăţi de recogniţie pentru asemenea numere. Cu acest prilej trebuie să avem în vedere dubiile suscitate de o atare transformare, pe care le-am discutat (§§ 63—68). Dacă procedăm la fel ca acolo, noile numere ne vor fi date ca extensiuni de concepte.

---

* Este uşor de văzut că o durată de milioane de ani nu ar fi de ajuns pentru aceasta.

§ 105. Pe baza acestui mod de a concepe numerele* se explică ușor, după părerea mea, farmecul pe care îl exercită studiul aritmeticii și analizei. Parafrazînd o afirmație binecunoscută, am putea spune: obiectul propriu al rațiunii este rațiunea[274]. În cadrul aritmeticii, noi nu avem de-a face cu obiecte pe care le cunoaștem ca pe ceva străin, exterior, prin intermediul simțurilor, ci cu obiecte date în mod nemijlocit rațiunii, care le poate intui deplin pe acestea ca pe ceva propriu, al ei**.

În pofida faptului de mai sus, ori, mai bine zis, tocmai datorită lui, aceste obiecte nu sînt fantasme subiective. Nu există nimic mai obiectiv decît legile aritmeticii.

§ 106. Să aruncăm încă o dată o scurtă privire retrospectivă asupra mersului pe care l-am urmat în cercetarea noastră! După ce am stabilit că numărul nu este un conglomerat de lucruri sau o proprietate a unui asemenea conglomerat, dar, pe de altă parte, nu este nici produsul subiectiv al unor fenomene psihice, ci, dimpotrivă, că determinarea numerică a unui concept enunță ceva obiectiv, ne-am străduit, în continuare, să definim fiecare dintre numerele 0, 1 ș.a.m.d. în parte, precum și trecerea de la un număr la altul în cadrul șirului numerelor. O primă tentativă a eșuat, întrucît noi eram în măsură să definim numai acele aserțiuni despre concepte în care 0, 1 intervin în calitate de părți componente, dar nu eram în măsură să definim înseși aceste numere în mod separat. Drept urmare, nu am putut demonstra identitatea numerelor. A reieșit că numărul pe care îl studiază aritmetica nu poate fi conceput ca un atribut neautonom,

* Mod pe care l-am putea numi de asemenea formal, dar care este absolut distinct de cel pe care l-am examinat mai sus sub această denumire[273].

** Prin aceasta nu vreau să contest cîtuși de puțin că, în absența impresiilor senzoriale, am fi opaci ca un lemn și că nu am putea avea cunoștință despre numere sau despre orice altceva; dar în cadrul de față, acest principiu psihologic nu ne privește cîtuși de puțin. Doresc să subliniez încă o dată primejdia permanentă de a confunda două chestiuni radical deosebite.

ci trebuie conceput în mod substantival*. Numărul ne-a apărut, prin urmare, ca obiect recognoscibil, deși nu ca obiect fizic sau măcar spațial, și totodată nu ca un obiect despre care ne-am putea forma o reprezentare cu ajutorul imaginației. Am emis apoi principiul că semnificația unui cuvînt nu poate fi elucidată în mod izolat, ci numai în contextul unei propoziții, încredințat fiind că numai prin respectarea acestui principiu putem evita înțelegerea fizicalistă a numărului, fără a cădea în cea psihologică. Or, există tocmai un gen de propoziții care trebuie să aibă un sens pentru fiecare obiect: propozițiile de recogniție, care, în cazul numerelor, poartă denumirea de egalități. Am văzut că și determinarea numerică poate fi concepută ca o egalitate. Ca atare, se cerea să stabilim sensul unei egalități numerice, să-l exprimăm fără a face uz de numerale sau de cuvîntul „număr". Am descoperit că o judecată de recogniție privitoare la numere are drept conținut posibilitatea ca obiectele care cad sub un concept F să fie puse în corespondență biunivocă cu obiectele care cad sub un concept G. Definiția noastră trebuia, deci, să echivaleze posibilitatea menționată cu o egalitate numerică. Am amintit unele cazuri de același gen: definiția direcției pe baza paralelismului, definiția formei pe baza asemănării ș.a.m.d.

§ 107. S-a pus atunci întrebarea: în ce condiții avem dreptul să concepem un conținut ca aparținînd unei judecăți de recogniție? Pentru aceasta, se cere să fie satisfăcută condiția ca, în cadrul fiecărei judecăți, partea stîngă a egalității asumate cu titlu de probă să poată fi înlocuită prin cea dreaptă, fără a se afecta prin aceasta adevărul judecății. Or, dacă nu punem în joc alte definiții despre partea stîngă sau dreaptă a unei egalități, nu cunoaștem un alt enunț decît tocmai cel al identității[276]. Așadar, era suficient să se pună în evidență posibilitatea substituției în cadrul unei egalități.

---

* Această distincție corespunde celei dintre „albastru" și „culoarea cerului"[275].

Dar un dubiu continua să subziste. O propoziţie de recogniţie, într-adevăr, trebuie să aibă întotdeauna un sens. Or, dacă posibilitatea punerii în corespondenţă biunivocă a obiectelor de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G o înţelegem ca pe o identitate şi dacă, în consecinţă, spunem: „Numărul ce revine conceptului F este identic cu numărul ce revine conceptului G", introducînd astfel expresia „Numărul ce revine conceptului F", egalitatea va avea pentru noi un sens numai atunci cînd ambele ei părţi vor avea forma stipulată mai sus. Potrivit unei atare definiţii, nu am putea stabili dacă o egalitate este adevărată sau falsă in cazul cînd numai una din părţile ei are această formă. Am ajuns astfel la următoarea definiţie:

Numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „concept echinumeric cu conceptul F". înţelegîndu-se că un concept F este echinumeric cu un concept G atunci cînd există posibilitatea unei corespondenţe biunivoce.

Aici noi am presupus că sensul expresiei „extensiune a conceptului" este cunoscut în prealabil. Desigur, acest mod de a depăşi dificultatea nu va fi acceptat în mod unanim; unii vor prefera să risipească acel dubiu într-un mod diferit. Eu însumi nu atribui acestui apel la extensiunea conceptului o importanţă decisivă[277].

§ 108. Acum ne mai rămîne să explicăm corespondenţa biunivocă; pe aceasta noi am redus-o la relaţii pur logice. După ce am schiţat în linii mari demonstraţia propoziţiei: Numărul unui concept F este egal cu numărul conceptului G atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G, am definit numărul 0, expresia „*n* este succesorul imediat al lui *m* în şirul numerelor naturale" şi numărul *1*, după care am arătat că 1 este succesorul imediat al lui 0 în şirul numerelor naturale. Am enunţat cîteva teoreme care în acest stadiu se pot demonstra cu uşurinţă şi apoi ne-am oprit ceva mai mult asupra următoarei propoziţii care ne arată că şirul numerelor este

infinit: În şirul numerelor naturale orice număr admite un succesor.

Am fost conduşi astfel la conceptul „membru al şirului numerelor naturale terminat cu n“, concept despre care am urmărit să arătăm că numărul său este succesorul imediat al lui n în şirul numerelor naturale. L-am definit mai întîi prin intermediul succesiunii unui obiect y după un obiect x în cadrul unui φ-şir general. Sensul acestei expresii a fost redus, la rîndul său, la relaţii pur logice. În felul acesta am reuşit să arătăm că raţionamentul care procedează de la n la $(n+1)$ şi este considerat îndeobşte a fi specific matematic, se întemeiază pe formele universale ale raţionamentului logic.

Pentru a demonstra infinitatea şirului numerelor trebuie să apelăm acum la propoziţia că nici un număr finit din şirul numerelor naturale nu este propriul său succesor. Am ajuns astfel la conceptul de număr finit şi la conceptul de număr infinit. Am arătat că în principiu acesta din urmă este tot atît de întemeiat din punct de vedere logic ca şi primul concept. Cu titlu de comparaţie ne-am referit la numerele cardinale infinite ale lui Cantor şi la „succesiunea în cadrul unei consecuţii“ a acestuia. scoţînd în evidenţă, cu acest prilej, deosebirea de formulare.

§ 109. Pe baza celor de mai sus a rezultat astfel cu o mare probabilitate natura analitică şi apriorică a adevărurilor aritmetice; am ajuns totodată la o reformă a concepţiei lui Kant. Mai departe, am văzut ceea ce mai lipseşte pentru a ridica această probabilitate la rangul de certitudine şi am indicat drumul care trebuie să conducă într-acolo.

În sfîrşit, am folosit rezultatele noastre în critica unei teorii formale a numerelor negative, raţionale, iraţionale şi complexe, critică ce a pus în evidenţă inadecvarea acesteia. Eroarea ei rezidă, cum am văzut, în faptul că ea asuma necontradicţia unui concept atunci cînd nici o contradicţie nu s-a manifestat, iar necontradicţia unui concept era considerată ca o garanţie suficientă a realiza-

bilităţii acestuia[278]. Această teorie îşi imaginează că este suficient să erijeze anumite postulate; satisfacerea acestora s-ar subînţelege atunci de la sine. Ea se comportă ca un zeu căruia Cuvîntul îi ajunge ca să poată crea tot ce vrea. Trebuie să criticăm, totodată, identificarea unei directive în vederea unei definiţii cu însăşi definiţia, directivă a cărei respectare ar introduce un element străin înăuntrul aritmeticii, deşi ea însăşi în formularea sa evită aceasta, dar numai întrucît rămîne o simplă directivă.

Teoria formală la care ne referim ajunge astfel în primejdia de a recădea în aposterioric sau cel puţin în sintetic, în pofida pretenţiilor sale de a accede la o culme a abstracţiunii.

Analiza noastră anterioară a numerelor întregi pozitive ne-a arătat însă posibilitatea de a evita această amalgamare a lucrurilor externe cu intuiţiile geometrice, fără să cădem totuşi în greşelile acelei teorii formale. Ca şi acolo, problema rezidă în stabilirea conţinutului unei judecăţi de recogniţie. Dacă considerăm că acest deziderat a fost îndeplinit integral, numerele negative, fracţionare, iraţionale şi complexe nu apar cu nimic mai misterioase decît numerele întregi pozitive, iar acestea din urmă nu apar ca avînd mai multă realitate ori existenţă, sau ca fiind mai inteligibile decît cele dintîi[279].

NOTE

[1] Titlul cărții este: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau, W. Koebner, 1884). O nouă ediție a apărut abia în 1934, la Breslau, iar în 1961 la Georg Olms Verlag, Hildesheim (copie fotomecanică a ediției din 1934).

[2] *Cuprinsul* cărții constituie un adevărat compendiu, la care se recomandă cititorului să revină în repetate rînduri, în cursul și după consumarea lecturii acestui opus fregean. Desăvîrșita claritate, organizarea logică minuțioasă, dorința autorului de a se face înțeles în același timp de către matematicieni, logicieni și filosofi au prezidat redactarea *Cuprinsului;* într-o oarecare măsură, efortul lui Frege de a prezenta lucrurile într-o formă cît mai accesibilă a fost dictat de neînțelegerea cu care fusese primită, înainte cu cîțiva ani *Scrierea conceptuală*. Cu toate acestea, nici *Fundamentele aritmeticii* nu au fost receptate, la apariție, de un public mai larg, iar primirea făcută de către un matematician de prima mînă ca Georg Cantor sau de tînărul filosof Edmund Husserl dovedește că, la apariție, sensul inovator al cărții nu a fost receptat nici măcar de autorități în materie.

[3] Distincția dintre număr pe de o parte și semn, cifră, numeral pe de altă parte este conținută implicit; Frege va reveni permanent la acest principiu diriguitor al concepției sale filosofice.

[4] Asupra statutului logic al variabilelor a se vedea, de asemenea, explicațiile lui Frege în „Funcție și concept" și „Ce este o funcție?"; cf. îndeosebi pp. 252—253 și 320—323 în volumul de față.

[5] Acest pasaj cu care se deschide *Introducerea* este dătător de seamă asupra densității, fluenței și clarității prin care se distinge maniera fregeană de expoziție. În mai puțin de două pagini, filosoful german formulează explicit sau face să transpară o seamă de teze fundamentale ale filosofiei logicii: (i) distincția

dintre semn şi semnificat; (ii) o propoziţie este ţinută să semnifice un acelaşi conţinut pentru mai mulţi; (iii) variabilele sînt utilizate pentru a exprima generalitatea propoziţiilor; (iv) numărul este un obiect determinat cu proprietăţi specificabile; (v) o variabilă nu semnifică un obiect anumit.

[6] Întorsătură tipic socratică a frazei, în consonanţă cu reamintirea (în aliniatul următor) a faptului că precondiţia învăţării este socraticul „ştiu că nu ştiu".

[7] Johann Friedrich Herbart (1776—1841), filosof, psiholog şi pedagog german, a creat sub influenţa idealismului leibnizian şi kantian un sistem metafizic, în care priveşte realitatea ultimă ca absolut unitară, imuabilă şi guvernată de legea necontradicţiei. Lui Herbart îi aparţine, printre altele, încercarea de a crea o psihologie matematică.

[8] Caracterizarea calculului ca gîndire agregativă, mecanică este tipică pentru orientarea posthegeliană, printre ai cărei reprezentanţi se numără şi Kuno Fischer. Respingînd această opinie pe care o împărtăşeau, dealtfel, şi filosofi aflaţi la antipodul hegelianismului (de la Hobbes la J. Stuart Mill), Frege pune în joc universalitatea legilor gîndirii. Deşi în acest context vorbeşte despre *legi ale gîndirii*, Frege va preciza în alte scrieri că obiectul logicii nu este nicidecum gîndirea şi legile ei; logica vizează legile *gîndului* însuşi, gînd care este conţinut posibil al gîndirii, însă rămîne totodată obiectiv, independent de gîndire.

[9] Pentru Frege nu există o logică a raţionamentului matematic, deosebită de logica generală.

[10] Se are în vedere înţelegerea numărului întreg ca agregat de unităţi indistincte.

[11] Trebuie avut în vedere sensul special pe care cuvintele „concept" şi „obiect" îl capătă la Frege. Fiecare număr în parte este un *obiect*, dar toate numerele individuale cad sub *conceptul* numărului. Asupra acestei distincţii logicianul german va reveni în repetate rînduri.

[12] Fundarea aritmeticii fiind înţeleasă de Frege în accepţia ei mai restrînsă, pur logică, de reconstrucţie raţională a conţinutului

ei conceptual, intruziunea psihologicului pe tărîmul matematicii este condamnată fără drept de apel. Desigur că altfel se pune chestiunea atunci cînd avem în vedere studiul epistemologic al relaţiilor dintre gîndirea matematică şi gîndul exprimat în propoziţia matematică. În elucidarea întrebării: cum ajunge gîndirea să dobîndească conceptul numărului? discipline ca psihologia şi epistemologia genetică pot aduce o contribuţie semnificativă. Pe un plan superior, psihologia creaţiei matematice şi modelarea acesteia nu sînt cu totul irelevante pentru epistemologia matematicii însăşi. Dealtfel, epurarea logicii şi a matematicii de orice element antropologic este chestionabilă. Reacţia lui Frege împotriva exceselor psihologiste ale vremii sale rămîne totuşi explicabilă iar străduinţa sa de a delimita planurile logicii şi psihologiei este validabilă în absolut.

[13] Reacţia împotriva materialismului istorico-naturalist, persiflarea evoluţionismului vulgar cu neprielnice răsfrîngeri în logica psihologistă a vremii nu-l conduce pe Frege în preajma vreunui proiect hegelian sau, să spunem, hipostaziant-platonic. Este afirmată, pur şi simplu, obiectivitatea adevărului matematic, independenţa lui faţă de conştiinţa umană şi de substratul material — oricare ar fi acela — al conştiinţei. Pe de altă parte, geneza şi istoricul conceptelor matematice este, potrivit lui Frege, irelevantă pentru analiza logică a conţinutului lor. În ultima chestiune a se vedea şi numeroase alte pasaje ale lucrării de faţă, precum şi nota 16.

[14] Ernst Schröder (1841—1902), matematician german, a fost ultimul reprezentant proeminent al perioadei iniţiale din dezvoltarea logicii matematice, adică perioada algebrei logicii. Ernst Schröder a perfecţionat şi sistematizat algebra booleană a claselor, precum şi algebra relaţiilor elaborată de Peirce. Printre lucrările sale, în afară de acel manual de aritmetică şi algebră la care se referă Frege, se numără: *Der Operationskreis des Logikkalküls* (Leipzig, 1877) şi *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (3 volume, Leipzig, 1890—1905). Schröder era logicist, considera că matematica nu este decît logică dezvoltată pe baza algebrei relaţiilor sau a ceea ce am numi astăzi calcul funcţional de ordinul 1. El a anticipat şi teoria tipurilor. Schröder nu a

înțeles valoarea operei fundamentale a lui Frege, *Begriffsschrift* (1879), iar recenzia sa nefavorabilă a pecetluit, din cauza autorității științifice considerabile de care se bucura semnatarul ei, destinul unei cărți care a trecut aproape neobservată la apariție. Izolarea lui Frege se datorează în mare măsură incapacității lui Schröder de a înțelege noua paradigmă a logicii, neîncadrabila în canoanele algebrei booleene.

15 Nedetectarea *de facto* trebuie deosebită de imposibilitatea principială a ivirii unei contradicții. Totuși, așa cum va preciza în lucrări ulterioare, Frege nu crede că demonstrația de necontradicție întemeiază în măsură suficientă definițiile, întrucît demonstrația rămîne oricum exterioară conținutului conceptual angajat de aceste definiții. Logicismul fregean se opune din principiu punctului de vedere formalist. Logica este știința adevărului, nu a coerenței.

16 Pentru Frege, logica reprezintă prin excelență o investigație a obiectivului, în timp ce psihologia poartă asupra subiectivului. Acestei distincții îi corespunde distincția dintre concept și obiect, pe de o parte, reprezentare pe de alta. În ansamblul lucrării de față, importanța acestui principiu director este dezvoltată îndeosebi în §§ 26, 27, 58—61. Fiecare număr individual este un obiect; faptul că nu ni-l putem reprezenta ca atare nu știrbește cu nimic obiectualitatea lui; un obiect nereprezentabil nu încetează prin acest simplu fapt să fie un obiect. Obiect fiind, numărul nu este un lucru, adică ceva subzistent în spațiu și timp, dar el nu este nici o creație a conștiinței. La fel, nu este creație a conștiinței nici conceptul, întrucît el are în egală măsură un caracter obiectiv (cf., de exemplu, §§ 47, 48); însă conceptele sau obiecte abstracte cum sînt numerele, nu au propriu-zis realitate, adică subzistență autonomă, în genul lucrurilor concret-senzoriale.

17 Acest al doilea principiu director a atras cel mai mult atenția exegeților *Fundamentelor aritmeticii*, din mai multe motive. În primul rînd, deși Frege îi acordă în cuprinsul cărții de față o importanță deosebită (revenind asupra lui în §§ 60, 62, 106), el nu-l mai formulează explicit în lucrările lui de mai tîrziu, ceea ce i-a împins pe mai mulți cercetători proeminenți — printre care, de pildă, se numără Michael Dummett — să presupună că

Frege ar fi abandonat principiul contextualității, ca incompatibil cu principiile semanticii sale; semantica fregeană prezentată în „Despre sens și semnificație" — afirmă de asemenea Dummett — pornește de la presupoziția că semnificația și sensul numelor proprii sînt date, sensul propoziției rezultînd din și depinzînd de înțelesurile părților componente.

Un al doilea motiv rezidă în utilizarea particulară atît de importantă dată de Frege, în cadrul demersului îndreptat spre obținerea unui răspuns clar la întrebările privind numărul în general și definirea fiecărui număr în parte.

În sfîrșit, acest principiu al *contextualității înțelesului* este epocal prin conținutul lui; independent de exegeza operei fregeene, ei a impregnat filosofia contemporană a limbajului, sau s-a dovedit în consonanță cu ea, constituindu-se într-un adevărat topos al gîndirii veacului XX.

Din toate aceste motive, o analiză minuțioasă a principiului se impune. Ne vom limita la cîteva, esențiale, precizări.

a) Formularea literală a principiului este: „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden". Cuvîntul *Bedeutung* nu are nici accepția tehnică pe care trasarea distincției *Sinn-Bedeutung* i-o va acorda ulterior (a se vedea „Despre sens și semnificație"), ci vizează în mod nediferențiat *conținutul* sau *înțelesul* cuvintelor.

b) Dependența înțelesului cuvintelor de contextul propozițional se manifestă, de bună seamă, în variația înțelesului în funcție de contextele propoziționale diferite în care cuvintele sînt inserate. Totuși nu o asemenea interpretare a principiului contextualității avea în vedere Frege; nu variația înțelesului cuvintelor îl preocupă aici, nu această trăsătură accidentală a limbii obișnuite pe care limbajul științific este ținut s-o recuze; el vroia să spună, după toate probabilitățile, că înțelesul unor cuvinte izolate trebuie degajat din analiza unor propoziții al căror înțeles s-a dezvăluit deja intr-o etapă anterioară.

c) Ceea ce afirmă Frege se poate interpreta (i) fie ca afirmare categorică a faptului că cuvintele își capătă înțelesul în propoziție, înțelesul cuvintelor nesubzistînd ca atare în afara contextului propozițiilor, așa cum nici utilizarea lor nu are loc decît în și prin propoziții (ii), fie numai ca sugestie că acest înțeles nu

trebuie căutat ori chestionat în afara unui asemenea context. Ca atare se conturează două interpretări. *Prima* interpretare, mai tare, pare a se găsi, într-adevăr, într-o oarecare tensiune cu principiul după care semnificația unui întreg propozițional este dependentă de semnificația părților sale componente iar sensul propoziției este dependent de sensul părților componente. Acest din urmă principiu este consecința principiului fregean al intersubstituibilității, conform căruia înlocuirea unei părți a propoziției printr-o expresie avînd aceeași semnificație, respectiv același sens, nu modifică semnificația propoziției, respectiv nu modifică sensul acesteia.

A *doua* interpretare nu pare a contrazice semantica Frege-Church cu al ei principiu al dependenței funcționale a sensului și semnificației întregului propozițional față de sensul și semnificația cuvintelor. Ni se cere *să căutăm* înțelesul cuvintelor în contextul propozițional, nu ni se interzice însă a izola acest înțeles, localizîndu-l, de exemplu, în *definiens*-ul unei definiții.

d) Dacă ne întrebăm acum asupra utilizării pe care Frege o conferă principiului contextualității, această a doua interpretare, care are de partea ei și evidența textuală, se verifică prin faptul că înțelesurile cuvintelor aritmetice: *zero, unu, doi, . . ., număr* sînt definite și, ca atare, izolate; dar ele au fost desprinse tocmai din contextul propozițional, și anume — cum vom vedea — analizîndu-se înțelesul asertiunilor numerice, *Zahlangabe*, pentru a se preciza că aserțiunea numerică enunță ceva despre un concept, iar apoi analizîndu-se înțelesul anumitor propoziții de identitate. Analiza semnificației întregului propozițional devine o precondiție pentru degajarea semnificației expresiilor numerice, ceea ce validează principiul contextualității. Asupra mecanismului de abstragere a semnificațiilor cuvintelor care desemnează numere Frege se rostește clar: „Spre a obține conceptul de număr trebuie stabilit sensul unei identități numerice" (p. 109).

e) Corolarul operațional al principiului contextualității îl constituie ceea ce s-au numit mai tîrziu definiții contextuale (a se vedea partea IV a *Fundamentelor aritmeticii*). Motivația logico-filosofică este reliefată clar de către Frege în aliniatul imediat următor, atunci cînd evidențiază solidaritatea primelor două prin-

cipii. Al doilea decurge ca un corolar din primul. Într-adevăr, dacă înțelesul cuvintelor nu trebuie căutat în reprezentările asociate, care sînt numai subiective, difuze, și dacă indicarea unor entități concret-senzoriale este, în cazul unor obiecte abstracte ca numerele, impracticabilă, înțelesul unor cuvinte rămîne a fi statornicit prin analiza contextelor propoziționale în care aceste cuvinte își fac apariția.

f) Totodată, este evident că utilizăm nu cuvinte izolate, ci fraze întregi; cuvintele nu survin izolate, ci în cadrul unor structuri propoziționale. Această observație de bun-simț este potențată în cîmpul de forțe al unei concepții filosofice globaliste, holiste a cărei înrîurire s-a făcut simțită în Germania secolului XIX, ajungînd pînă la Frege. Hans D. Sluga vorbește despre o *concepție holistă a semnificației* la Frege, adversă epistemologiei atomiste corelată, aceasta din urmă, cu o înțelegere agregativă a judecăților; opoziția lui Frege față de atomism ar deriva „nemijlocit din atacul lui Kant la adresa empirismului și a atomismului asociat" (HANS D. SLUGA, „Frege and the Rise of Analytic Philosophy", „Inquiry", 18, pp. 471—498, vezi în special pp. 479, 480—485). În opoziție cu Dummett, Hans Sluga conchide: „Principiul contextual nu a fost o simplă idee sclipitoare pe care Frege a lăsat-o ulterior de o parte. El era expresia unei viziuni filosofice fundamentale care aparține tradiției antiatomiste caracteristică pentru filosofia clasică germană. În al doilea rînd, textele demonstrează explicit că Frege a reafirmat principiul său după 1891 și cred că pînă și trăsăturile aparent recalcitrante ale concepției semantice fregeene de mai tîrziu nu pot fi clarificate decît în lumina acestui principiu" (*op. cit.*, p. 485).

Primatul judecății asupra conceptului, primatul gîndului complet asupra părților sale se află în consonanță cu principiul contextualității; a se vedea, pentru edificare, articolul lui Frege. „Despre concept și obiect" (în volumul de față) și comentariul însoțitor.

g) Principiul contextualității — despre care Michael Dummett afirmă că „după toate probabilitățile este cel mai important enunț filosofic al lui Frege" („Nominalism", în „Philosophical Review", 65, 4, 1956, p. 491) a fost reluat și extins în filosofia contemporană a limbajului de către gînditori de talia lui Wittgenstein și Quine.

În *Tractatus logico-philosophicus*, principiul intră în textura unei concepții atomiste a limbajului. Ludwig Wittgenstein îl reafirmă în aforismul 3.3: „Numai propoziția are sens; numai în contextul propoziției numele posedă semnificație", ca și în 3.314: „Expresia are semnificație numai în cadrul propoziției. Fiecare variabilă poate fi privită ca o variabilă propozițională. (Inclusiv numele variabil"). Dar în același timp, Wittgenstein scrie: „Eu înțeleg propoziția — la fel ca Frege și Russell — ca funcție de expresiile pe care ea le conține" (3.318).

Ulterior, așa cum se știe, Wittgenstein a îmbrățișat o concepție holistă, sistemică a semnificației care debordează cadrul îngust al logicii. Cuvintele sînt văzute ca dobîndindu-și semnificația în cadrul jocurilor de limbaj, activități lingvistice complexe, părți mari ale fluxului gîndirii și vieții; semnele funcționează, prind viață înăuntrul întregului sistem semiotic.

18 Cf. în volumul de față § 97 din *Fundamentele aritmeticii* și articolul „Despre concept și obiect".

19 Pentru „număr", Frege folosește atît expresia „Anzahl", care vizează numărul cardinal cît și termenul mai general „Zahl"; în timp ce „Zahl" îmbrățișează în sfera sa orice număr — de exemplu cele negative, reale, complexe —, „Anzahl" poate fi numai 0 sau un număr întreg pozitiv. Traducerea noastră nu a reținut această distincție, cu neputință de a fi redată fidel și natural, însă contextul permite întotdeauna deslușirea sferei de cuprindere a expresiei „număr".

20 Deși Frege nu menționează ca atare demersul axiomatic sau metoda deductivă, despre acestea este totuși vorba aici. În matematică funcția demonstrației nu este numai de a conduce la adevăruri noi, ci și de a conecta între ele adevărurile într-un sistem deductiv; urmărim deducerea a cît mai multe adevăruri din cît mai puține, fundamentale. Descoperirea adevărurilor primare, originare, este punctul către care trebuie să năzuim, spre a ne întoarce de acolo la teoreme, pe traiectul demonstrațiilor riguroase.

21 Aluzie la procedeele logice, puține la număr și tipice, aplicate într-o diversitate de cazuri. Demersul deductiv evidențiază repetitivitatea metodelor de definire și de demonstrare.

22 Conceptele amintite — introduse de Kant în *Critica rațiunii pure* — izvorăsc din distincțiile între adevăruri necesare și contingente, raționale și de fapt, distincții trasate de către Hobbes, Leibniz, Hume și Kant, și comportînd atît aspecte pur logice cît și epistemologice. Discutarea acestei distincții a constituit axa controversei între empirismul și raționalismul secolelor XVII—XVIII. Cf., de exemplu, cartea lui Mircea Flonta, *Adevăruri necesare?* (Editura Științifică și Enciclopedică. București, 1975; v. în special cap. I, II, pp. 13—28).

23 Deși Frege începuse prin a spune că el nu atribuie un sens nou distincțiilor filosofice puse în joc, precizările sale au semnificația unei adevărate regîndiri a întregii probleme. În primul rînd, distincția analitic-sintetic nu mai este considerată exclusiv la nivelul judecăților „în care este gîndit raportul dintre un subiect și un predicat" (Kant). adică la nivelul logicii tradiționale. Pînă și un gînditor de talia lui Leibniz, care în alte privințe a anticipat viziunea logistică, rămînea tributar aici paradigmei tradiționale. În al doilea rînd, pentru Leibniz și Kant, adevărurile analitice se arată a fi cele reductibile la o expresie deductibilă din legea identității sau aceea a necontradicției, precum și din definiții; legile logice generale pe care Frege le are în vedere aparțin însă logicii propozițiilor și predicatelor.

O propoziție analitică este deci, pentru Frege, una deductibilă din propozițiile adevărate ale logicii. Acestea din urmă sînt *per definitionem* analitice. V. și nota 25.

24 Propozițiile *a posteriori* sînt, prin urmare, factuale iar demonstrația lor se bazează pe ceea ce mai tîrziu aveau a se numi propoziții atomare. Este unul din puținele pasaje din opera lui Frege în măsură de a sugera că trebuie să admitem cumva propoziții atomare, respectiv fapte atomare — ipoteză fundamentală pe care se reazemă *Tractatus logico-philosophicus*. Să se observe însă că nu orice adevăr fără generalitate care cuprinde un enunț despre obiecte determinate este *eo ipso* factual; el mai trebuie să fie și indemonstrabil. Propozițiile singulare din aritmetică, de exemplu „2 este mai mic decît 3", sînt și ele enunțuri singulare despre obiecte determinate, rămînînd totuși, pentru Frege, *a priori*.

[25] Această remarcă este întrucîtva consonantă cu ideea analiticității ca rezolubilitate a unui complex în elementele sale mai simple, idee pe care atît Leibniz cît și Kant o reliefaseră cu stăruință, deși în contexte și țeluri divergente. Astfel, Kant: „Judecățile analitice... le-am putea numi și *judecăți explicative*, fiindcă... nu adaugă prin predicat nimic la conceptul subiectului, ci numai îl descompun prin analiză în conceptele lui parțiale, care erau deja gîndite în el (deși confuz)" *(Critica rațiunii pure*, Ed. Științifică, 1969, pp. 48—49). Sau: „judecățile analitice nu extind de loc cunoștința noastră, ci... conceptul, pe care îl am, este descompus și îmi este făcut inteligibil mie însumi" *(ibid.*, p. 49). — Nu putem omite însă nici deosebirea substanțială dintre cele două modalități de abordare. Pentru Leibniz și Kant, o propoziție analitică este des-facere clarificatoare a unui conținut primar, deci analiză *in actu* suprapusă peste sinteza judicațională, în timp ce pentru Frege, propozițiile analitice sînt mai curînd cele rezolubile dar nu încă rezolvate în conceptele mai simple și totodată mai generale. Totodată, Frege, preocupat să separe conținutul obiectiv al propozițiilor de raportarea la acest conținut a subiectului care judecă nu reține, în caracterizarea din § 3 a adevărurilor analitice, ideea caracterului neinformativ al acestora din urmă. Logica și matematica nefiind pentru Frege construcții lingvistice, obiectele și conceptele logice nefiind ficțiuni, adevărurile logice se prezintă ca obiective și informative pe măsura universalității lor. Mai mult: întrucît punctul de plecare în logica fregeană nu este conceptul, ci judecata, adevărurile analitice nu mai au cum să desfășoare concepte preexistente; ele provin din adevăruri inițiale.

[26] Trecînd în revistă ideile lui Hobbes, Locke, Newton, precum și ale altor filosofi moderni, Frege trimite în repetate rînduri la cele două volume ale cărții *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt* a lui Joh. Julius Baumann (Berlin, Druck und Verlag vom Georg Reimer, 1868). Cartea, o antologie comentată, își propunea să urmărească influența pe care matematica o exercită încă de la începuturile filosofiei moderne asupra elaborării conceptelor și metodelor filosofice; în mod deosebit era relevată înrîurirea concepției despre matematică asu-

pra conceptului de filosofie, asupra metodei şi logicii celor mai de seamă cugetători din secolele XVII—XVIII.

Pasajele din Hobbes, Locke, Newton la care se face aluzie sînt luate din: Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae*, Amsterdam, 1668, Dialogurile I—III, în special I, p. 19 şi III, pp. 62—63; Locke, *Eseu asupra intelectului omenesc*, Cartea a IV-a, capitolele IV, § 6 şi VII, §§ 6, 10; Newton, *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, vol. I, cap. I—III.

[27] Vezi *Critica raţiunii pure*, în traducerea lui Nicolae Bagdasar şi Elena Moisuc, Ed. Ştiinţifică, 1969, pp. 191—192.

[28] Hermann Hankel (1839—1873), matematician german, a dezvoltat ideile lui Riemann; a adus contribuţii în teoria funcţiilor, în istoria şi filosofia matematicii.

[29] Vezi *Critica raţiunii pure*.

[30] Hermann Günther Grassmann (1809—1877), matematician şi sanscritolog german, este unul din întemeietorii calculului vectorial şi tensorial modern. Cartea sa *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844, ediţie revizuită, 1862) a trecut aproape neobservată la apariţie. Calculul lui Grassmann cu mărimi extensive compuse din *n* unităţi reprezintă o geometrie *n*-dimensională corespunzătoare unui calcul numeric generalizat. Ca unul din pionierii algebrei abstracte, Grassmann a formulat principiile unei metode de generalizare succesivă a operaţiilor cu numere, pe care le trata în spirit abstract, considerînd exclusiv proprietăţile lor pur combinatorii. Faţă de acest demers abstractizant care presupune punerea între paranteze a conţinutului conceptual al operaţiilor, Frege a manifestat serioase rezerve de ordin filosofic.

[31] John Stuart Mill (1806—1873), logician şi economist englez, a dezvoltat o concepţie empiristă asupra logicii în cunoscutul său *System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation* (London, 1843). Pentru ideile directoare ale logicii lui Mill, vezi şi *Dezvoltarea logicii* de W. şi M. Kneale (vol. I, traducere de Cornel Popa, Ed. Dacia, 1974, pp. 395—401).

[32] Definiția genetică a numerelor naturale este acceptată de către Frege, însă acesta din urmă, pe de o parte, respinge întemeierea empiristă à la Mill, iar pe de altă parte consideră că se poate merge mai departe, traducîndu-se în termeni pur logici definiția obișnuită a unui număr natural dat ca rezultînd prin adăugarea unei unități la predecesorul său imediat.

[33] Într-adevăr, numărul 0 este o achiziție relativ tîrzie. În matematica europeană, el reprezintă un împrumut din matematica indiană, mijlocit de arabi.

[34] Adevărul unei propoziții matematice este independent de modul în care ajungem să-l stabilim, susține Frege. *A fortiori*, el nu trebuie pus în dependență de factori empirici ori psihofiziologici. Frege înțelege deci să despartă complet epistemologia genetică de considerațiile logico-gnoseologice referitoare la natura adevărurilor matematice, la conținutul pe care acestea le exprimă. În spirit raționalist, Frege va preciza, nu odată, în cuprinsul *Fundamentelor aritmeticii*, că aplicabilitatea la experiență nu dovedește conținutul intrinsec empiric al propozițiilor matematice (a se vedea și nota 12).

[35] *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*. Afirmația lui Philalèthe se inspiră din Locke (*Eseu asupra intelectului omenesc*, cartea II, cap. XVI, § 5); vezi ed. rom., vol. I, Ed. Științifică, 1961, p. 185).

[36] Este vorba, evident, despre spațiul obișnuit, euclidian, considerat ca omogen și izotrop și abstracție făcînd de orice sistem de coordonate care i s-ar putea asocia.

[37] Proprietățile aritmetice — și în general matematice — ale numerelor nu sînt contingente, spre deosebire de proprietățile lor legate de aplicabilitatea conceptelor și propozițiilor aritmetice. Astfel, proprietățile lui 5 de a fi impar, prim, egal cu 2+3, etc. sînt necesare și totodată decurg în mod necesar din definițiile numerelor respective, precum și din aceea a adunării; dimpotrivă, proprietatea lui 5 de a fi identic cu numărul degetelor unei mîini este contingentă. Însă, întrucît aritmetica are a se ocupa numai de proprietățile pure ale numărului, inducția nematematică nu ne poate fi de nici un folos, iar considerațiile lui Mill despre

sursa inductivă a adevărurilor aritmeticii se dovedesc, în această ordine de idei, irelevante. Cu atît mai puţin se poate spera să obţinem legile generale ale aritmeticii prin inducţie empirică, à la Mill.

38 Previziunea lui Frege s-a confirmat întru totul: logica inductivă de astăzi se sprijină pe teoria probabilităţilor şi este o disciplină cu un grad înalt de matematizare.

39 Pasajele la care se face aluzie sînt din *Avant-Propos* şi cap. 1 al Cărţii I din *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain.*

40 Cf., ed. rom., 1969, p. 65.

41 Frege admite fără ezitare caracterul sintetic al propoziţiilor geometriei; totuşi, cum vedem, el nu se pronunţă în mod explicit asupra naturii lor apriorice. Nu se poate presupune că Frege ar avea oarecari reticenţe în a îmbrăţişa *dictum*-ul kantian asupra apriorismului axiomelor geometriei, căci el aderă explicit la el în § 89, dar este curios că aici el *pare* a pune geometria în rîndul ştiinţelor empirice. Pe de altă parte, o intuiţie spaţială care poartă numai asupra experienţei reale, nu şi asupra celei imaginare, poate fi numai aceea a spaţiului euclidian. Spaţiile neeuclidiene nu sînt direct intuibile, însă pot fi *gîndite*, în pofida faptului că ele contrazic intuiţia.

Spre sfîrşitul vieţii sale, Frege a abandonat total doctrina logicistă, ajungînd să vadă în „sursa geometrică a cunoaşterii" — pe care o caracterizează ca pe „acea sursă de cunoaştere din care izvorăsc axiomele geometriei" — *axiome* în accepţia lor originară de adevăruri intuitive — fundamentul întregii matematici, inclusiv al aritmeticii.

42 Este vorba despre *Scrisoarea către Gabriel Wagner, Despre Utilitatea Artei Raţiunii sau Logica* (1696).

43 În *De Scientia Universali seu Calculo Philosophico,* Leibniz scrie: „Discrimen inter veritates necessarias et contingentes vere idem est, quod inter numeros commensurabiles et incommensurabiles; ut enim in numeris commensurabilibus resolutio fieri potest in communem mensuram, ita in veritatibus necessariis demonstratio, sive reductio ad veritates identicas locum habet".

[44] Vezi *Corespondența lui Leibniz cu Arnauld*, în G. W. Leibniz, *Opere filosofice — I* (Ed. Științifică, p. 204). Potrivit lui Leibniz, nu numai adevărurile rațiunii, ci și cele de fapt, contingente, ar fi aprioric demonstrabile; demonstrația lor ar presupune însă preștiința divină, pe care Leibniz o și postulează, în tentativa extrem-raționalistă de a privilegia lumea reală ca optimă, deci ca minimal rea. W. Kneale rezumă astfel poziția lui Leibniz: acesta „susține în mod pregnant că toate propozițiile adevărate, inclusiv cele singulare, sînt identități virtuale, deși singur Dumnezeu le poate cunoaște *a priori*. Există desigur o distincție între adevărurile rațiunii, care sînt valabile pentru toate lumile posibile, și adevărurile de fapt, care sînt într-un sens contingente, deoarece ele depind de voința lui Dumnezeu și sînt valabile numai pentru lumea reală. Dar principiul rațiunii suficiente ne asigură că chiar adevărurile de fapt sînt necesare, întrucît nimic nu se întîmplă fără un temei. În *orice* propoziție adevărată, conceptul subiect conține conceptul predicat și deosebirea dintre adevărurile rațiunii și adevărurile de fapt rezidă pur și simplu în aceea că ultimele nu pot fi demonstrate fără referire la acea superioritate a realului care l-a determinat pe Dumnezeu să le aleagă dintre toate lumile posibile“ (William Kneale și Martha Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. 1, p. 356). Pentru o discuție mai amănunțită, a se vedea, de ex. capitolul III: „Propozițiile contingente și legea rațiunii suficiente“ din cartea lui Bertrand Russell despre Leibniz (*La philosophie de Leibniz*, trad. franc., Alcan, 1908) și cap. 25 din *G. W. Leibniz. Viața și personalitatea filosofică* de Dan Bădărău (Ed. Științifică, 1966).

[45] W. Stanley Jevons (1835—1882), economist și logician englez, reformator al algebrei lui Boole și pionier în proiectarea mașinilor logice. Jevons a reușit să simplifice calculul logic, înlocuind disjuncția exclusivă a lui Boole cu disjuncția inclusivă, ale cărei legi sînt duale cu legile conjuncției. A eliminat totodată substracția și diviziunea logică din rîndul operațiilor folosite în algebra logicii. A dezvoltat o concepție logicistă asupra matematicii. Lucrarea principală a lui Jevons, *The Principles of Science* (Londra, 1874; ed. a 2-a, 1877), la care se referă în cîteva rînduri și Frege, dezvoltă ideile logicianului englez în domeniul metodo-

logiei ştiinţei şi descrie „pianina logică", un strămoş al computerilor de astăzi.

[46] J. S. Mill, *op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

[47] Secţiunea este semnificativă pentru filosofia fregeană a logicii; respingerea totală a formalismului gol, a concepţiei după care putem opera cu semne lipsite de conţinut, a stat întotdeauna printre preocupările celui ce a elaborat *Scrierea conceptuală.* O întreagă istorie se află în spate. Tradiţia nominalistă engleză îl condusese pe Hobbes la teza că a gîndi înseamnă a calcula. Venită pe continent, această idee intră, cu Leibniz, pe făgaşul raţionalismului, calculul fiind visat ca un mod privilegiat de a gîndi prin intermediul unui instrument perfect de analiză şi compunere a ideilor. Întoarsă pe pămînt britanic, după un secol şi mai bine, echivalarea gîndirii cu calculul prezidează prin Boole constituirea algebrei logicii. A opera cu semnele potrivit unor reguli formale, abstracţie făcînd de interpretările conferibile formulelor simbolice, devine un procedeu de prestigiu, extrapolat dincolo de graniţele algebrei. Aparatul formal al logicii dovedindu-se o algebră, gîndul că algebra, şi cu ea matematica întreagă, ar fi la rîndul ei o logică evoluată (cf. secţiunea precedentă) era firesc să capete prestigiu. Dar întrucît logica devenise calcul logic, cu formule susceptibile să capete felurite interpretări şi manipulate *ca şi cum* nu ar fi avut actualmente nici una, se consolidase prejudecata că a calcula înseamnă a nu gîndi ori a gîndi în gol. Reacţia lui Mill împotriva manipulării iscusite şi artificioase a semnelor de limbaj nu însemna nicidecum o repunere a gîndirii în drepturile ei; ea izvora numai din tentaţia unei resorbiri a matematicii în empiria faptelor observabile. A gîndi, pentru Mill, înseamnă a agrega inductiv şi a segrega deductiv observaţiile făcute asupra lucrurilor sensibile. În replică, Frege reafirmă crezul normal al matematicianului, care vede în activitatea sa nu un balet mecanic al semnelor, ci o supremă creaţie raţională. Dacă deci Hobbes spusese că a gîndi înseamnă a calcula, iar Mill, dealtfel tot în spirit nominalist, ajunsese să creadă că a calcula înseamnă a nu gîndi, Frege va deplasa accentul *dictum*-ului hobbesian şi totodată îl va contrazice formal pe Mill: a calcula înseamnă tocmai a gîndi. Dacă aritmetica nu este a

pietricelelor şi a turtelor dulci (a se vedea Introducerea lui Frege la opusul de față, p. 35), ea nu este nici a semnelor lipsite de orice conținut: „este posibil ca limbajul simbolic al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gîndirii reale, încît ulterior, ca să spunem aşa, să gîndească el pentru noi“ (tot Introducerea, pp. 31—32). Pentru Frege, semnele lipsite de conținut sînt inoperante; ele sînt simple obiecte materiale cu care nu se poate face nimic, întrucît nu comunică nimic. Semnul incorporează întotdeauna, face sensibil un conținut de gîndire, reificîndu-l. Folosirea unui limbaj simbolic prezintă multiple avantaje, printre care acela al prezentării intuitiv-sensibile a structurii logice a matematicii, dar în nici un caz nu epurează matematica de conținutul ei, de gînd.

În poziția de principiu a lui Frege se ascunde însă, totodată, o anumită lipsă de receptivitate față de demersul algebrei logicii. Frege nu crede că forma se poate separa efectiv de interpretare, nu acceptă că un aparat simbolic poate fi manipulat exclusiv pe baza unor reguli de calcul, abstracție făcînd de orice interpretare. Conținutul unui calcul — crede el — nu poate fi pur operațional, conferit aşadar de reguli stipulate după bunul plac, interpretarea este subînțeleasă; orice formulă are un conținut conceptual *ab initio*, altfel nici nu l-ar putea primi ulterior, pluralitatea interpretărilor adăugîndu-se numai unui conținut general gîndit acolo din capul locului. — Dificultatea lui Frege în a înțelege fecunditatea axiomaticii formale propusă de Hilbert spre sfîrşitul veacului XIX a fost reversul insistenței sale de a arăta că a calcula înseamnă a gîndi.

[48] Aşadar, dacă aritmetica este un sistem ipotetico-deductiv, teoremele ei vor fi totuşi propoziții analitice, şi anume implicații; dar o propoziție analitică de forma unei implicații poate fi alcătuită din componente sintetice.

[49] În *Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Newton scrie: „Per *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus“ (ed. 1732, p. 4). (Prin număr înțelegem nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei cantități

oarecare față de o altă mărime de același gen, luată (de noi) ca unitate).

[50] Asupra tratării acestei probleme la Euclid și în întreaga gîndire matematică elină, a se vedea cap. II — Secțiunea C. Teoria proporțiilor, din O. Becker, *Fundamentele aritmeticii,* Ed. Șt., 1968, p. 117.

[51] Secțiunile subsumate acestui titlu (§§ 21—25) urmează să analizeze și să răspundă negativ la întrebarea dacă numărul nu este cumva o proprietate a lucrurilor sensibile. *Sensul* acestei întrebări trebuie în prealabil statornicit cu grijă. În unele contexte, „proprietate" (Eigenschaft) și „concept" sînt termeni pe care Frege îi apropie ca înțeles (vezi, de exemplu, § 53 a scrierii de față și „Despre concept și obiect", în culegerea de față, p. 300). De aceea, s-ar putea crede că întrebarea formulată în titlul de mai sus ar admite parafraza: este numărul un concept de ordinul întîi? (asupra distincției de ordin între concepte a se vedea § 53, *in fine*). Totuși, lucrurile nu stau așa. Considerațiile lui Frege sînt îndreptate împotriva înțelegerii numărului ca proprietate și ca abstras din lucruri în același fel ca proprietățile generale ale lucrurilor sensibile. După Ignacio Angelelli: „Pare necesar să interpretăm accepția pe care Frege o dă aici lui «Eigenschaft» ca însemnînd mai curînd *accident* și, mai precis, *accident individual,* întrucît *aici* Frege presupune următoarea axiomă: dacă F este o proprietate a unui lucru exterior (fizic, sensibil), atunci F însuși este extern (fizic, sensibil). *Eigenschaften* sînt concepte și, potrivit înțelegerii fregeene a conceptelor, nu este adecvat să considerăm că conceptul *a fi o piatră* este mai „sensibil" sau mai „fizic" decît conceptul *a fi rădăcină pătrată din 2.* Or, dacă aici s-ar viza acest mod normal de înțelegere a proprietăților, ar fi imposibil să înțelegem argumentul lui Frege că numerele nu pot fi proprietăți ale lucrurilor sensibile, întrucît ele se aplică și la entități non-sensibile. Pentru a înțelege acest argument este necesar să presupunem axioma menționată mai sus. Dar atunci întrebarea generală: „Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?" trebuie reformulată propriu-zis ca: „Este oare numărul un lucru exterior (fizic, sensibil)?" În plus, mai întîlnim unele referiri la posibila întrebare dacă numerele nu sînt cumva

proprietăţi (concepte) sau obiecte în sens «logic». dar aceste referiri sînt accidentale“ (I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1967, p. 232).

52 Folosirea unui cuvînt în formă adjectivală şi în construcţie atributivă este unul din criteriile care indică statutul său de termen conceptual şi nu de nume propriu (vezi şi articolul „Despre concept şi obiect“). În cazul numărului însă, aparenţele limbajului obişnuit sînt înşelătoare: numărul nu este utilizat ca predicat sau atribut; vom vedea că este un obiect, fiind ca atare desemnat de un nume propriu.

53 Moritz Cantor (1829—1920), matematician şi istoric al matematicii.

54 Frege, evident, nu poate primi acest argument. El nu contestă geneza empirică a aritmeticii, nici aplicabilitatea numărului în domeniul lumii fizice, dar crede că asemenea observaţii nu sînt relevante pentru chestiunea în discuţie. Procesul de obţinere a numărului nu este de aceeaşi natură cu procesul prin care abstragem din lucruri proprietăţile lor sensibile, reţinînd ceea ce aceste proprietăţi au general şi comun; pe de altă parte, aşa cum se va lămuri mai jos, numărul este aplicabil *nu numai* în domeniul lucrurilor concret-sensibile, deci este greşit a-l identifica unei proprietăţi ca greutatea sau culoarea lucrurilor.

55 Este, prin urmare, un non-sens a vorbi despre numărul *unui* obiect. Întrebarea al cărei răspuns constituie o aserţiune numerică (Zahlangabe) nu are aceeaşi structură ca întrebarea: ce greutate sau ce culoare are obiectul acesta? Pe de altă parte, aşa cum va arăta în continuare Frege, dacă mă întreb asupra numărului unor *obiecte*, eu subsumez totodată obiectele în cauză unui *concept* şi tocmai acestuia din urmă îi revine numărul. Întrebînd, spre exemplu, cîte *cărţi de joc* conţine un pachet, răspunsul poartă asupra conceptului *Carte de joc din pachetul de faţă.*

56 În bună tradiţie scolastică, putem parafraza după cum urmează: numărul nu este accident al substanţei individuale, aşa cum este o anumită culoare în raport cu lucrul sau cu acea parte

a lucrului care manifestă o anumită culoare fiind astfel purtătorul real al acesteia.

[57] Să se observe că Frege spune: numărul revine unui anume ceva în raport cu un mod arbitrar de concepere, şi, nicidecum nu: numărul revine în mod arbitrar acestui ceva. Arbitrarietatea pusă în joc aici este analoagă acelui bun plac, de pildă, care, fără a ţine de răspunsul la o întrebare, ţine de posibilitatea formulării întrebării. Căci am libertatea de a pune o întrebare sau alta, în legătură cu unul şi acelaşi lucru, în funcţie de modul în care îl concep: odată fixată însă, întrebarea corectă admite un singur răspuns corect. Numărul nu ne este dat în senzaţie; ceea ce ne este dat în senzaţie, după Frege, este perfect obiectiv (chiar dacă, aşa cum se va preciza în alte locuri, organele de simţ introduc un anumit element subiectiv, acesta din urmă nu alterează cu nimic faptul că senzaţia are o sursă obiectivă şi este un mijloc de cunoaştere obiectivă). Proprietăţile senzoriale îi revin lucrului în mod obiectiv; nefiind o asemenea proprietate, determinarea numerică este arbitrară în sensul de mai sus; dar această arbitrarietate nu trebuie înţeleasă ca introducînd un element subiectiv sau convenţional, decît în acelaşi sens în care este subiectivă, de exemplu, alegerea unei întrebări şi nu a alteia dintr-un set întreg de întrebări ce se pot formula în legătură cu un anumit obiect. Aşa se explică insistenţa lui Frege în a demonstra că numărul nu este ceva de ordin subiectiv (a se vedea îndeosebi §§ 26, 27) şi că aserţiunea numerică „exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile“ (§ 47), obiectivitatea adevărului ei fiind solidară cu aceea a conceptului pus în cauză.

[58] *Eseu asupra intelectului omenesc,* Cartea a II-a, cap. XVI, § 1 (cf. ed. rom., Ed. Şt., 1961, vol. I, p. 184).

[59] Fragmentul avut în vedere este desprins din faimoasa *Dissertatio de Arte Combinatorica:* „Falso autem scholastici credidere numerum ex sola divisione continui oriri, nec ad incorporea applicari posse. Est enim numerus quasi figura quaedam incorporea, orta ex unione entium quorumcunque, v. g. DEI, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt quatuor. Cum igitur numerus sit quiddam

universalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet" (ediţia Erdmann, p. 8).

[60] Din *Historia et Commendatio Linguae Charactericae Universalis Quae Simul Sit Ars Inveniendi et Judicandi* (vezi ed. Erdmann, p. 162).

[61] Altfel spus, „triunghiular" în cazul de faţă nu mai trebuie asociat proprietăţii de a avea trei unghiuri, ci unor impresii senzoriale nemijlocite.

[62] Oarecum în treacăt, Frege rezumă în această frază ceea ce delimitează propria lui epistemologie a aritmeticii de epistemologia tradiţională. Cum am mai spus, modul în care, pornind de la percepţia obiectelor concret-senzoriale, subiectul cognitiv ajunge să opereze cu numere naturale nu este nicidecum analog modului în care se abstrage o proprietate comună mai multor obiecte; perceperea triunghiului declanşează aşadar o activitate intelectuală „care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3". Esenţa chestiunii rezidă în faptul că numărul apare în şi prin judecata numerică, aşa cum se va arăta mai jos, ceva mai detaliat. Judecata numerică este produsul unei activităţi intelectuale: numărarea, al cărei preludiu este fixarea unui concept, în vederea stabilirii numărului obiectelor care cad sub acesta.

[63] Semnele sînt semne numai în măsura în care au un conţinut, o semnificaţie; interesează, de aceea, nu proprietăţile lor materiale, ci proprietăţile care decurg din regulile lor de folosinţă, potrivit semnificaţiei ce li se conferă. Astfel, nesaturarea expresiilor care desemnează funcţii manifestă o proprietate a funcţiilor înseşi (vezi articolele „Funcţie şi obiect". „Despre concept și obiect").

[64] Diferenţa numerică corespunde unei diferenţe nu fizice, dar conceptuale. Numere diferite se atribuie unor concepte diferite.

[65] *An Essay towards a new Theory of Vision*, § 109.

[66] După ce a arătat că numărul nu este o entitate fizică sau o proprietate fizică, Frege trece la combaterea punctului de vedere subiectivist. La întrebarea: este numărul ceva subiectiv? Frege va răspunde cu o categorică negaţie. Critica sa — după

cum remarcă I. Angelelli (*op. cit.*, pp. 232—233) — vizează două ținte: pretenția demersului psihologist de a lua locul investigației aritmetice și concepera numărului ca reprezentare. A fi ceva subiectiv înseamnă în sensul tare a fi o reprezentare, *conceptus subiectivus*, accident individual al unui cuget individual. În sens mai slab, remarcă în continuare Angelelli, subiectivul implică o referire la subiect, dar nu la ceea ce este individual în subiect, ci la ceea ce acesta are comun cu întreaga clasă a subiecților individuali. Această „subiectivitate transcendentală" ar coincide cu „obiectivitatea transcendentală", obiectivitatea în sens slab care rezidă în însușirea de a fi accesibil și același pentru toate cugetele individuale. Or, „în timp ce Frege are în mod clar cele două sensuri ale „obiectivului" (deși nu introduce denumiri distincte pentru ele), el are numai o singură accepție a „subiectivului" — cea tare. În această accepție, numerele nu sînt subiective, adică nu sînt *Vorstellungen*, ceea ce din capul locului este limpede" (Angelelli, *op. cit.*, p. 234).

[67] Compararea matematicii cu geografia, a numerelor cu munții sau mările, revine în mai multe rînduri sub pana lui Frege. Matematica este prin excelență, pentru dînsul, descoperire și nu invenție, matematicianul fiind un explorator al tărîmului obiectiv. Obiectivitatea este aici înțeleasă în sensul tare, primordial: independență față de subiect.

[68] Așadar, determinarea numerică (Zahlangabe) poate fi sintetică a posteriori, numerele fiind utilizabile în cadrul enunțurilor factuale; de aici se naștea și iluzia empiristă a înțelegerii numărului ca entitate de ordin fizic.

[69] Raportul obiectiv-real pus aici în joc de către Frege clarifică orientarea sa ontologică; fiind de găsit la Kant, distincția este susceptibilă să alimenteze cu argumente ipoteza orientării kantiene a lui Frege. Trebuie să amintim însă că la Kant obiectivitatea coincide cu subiectivitatea transcendentală, adică presupune raportarea la subiectul în genere, în timp ce Frege omite *aici* (nu însă în alte locuri, d. ex. în § 105, primul alineat) distincția kantiană. Altfel spus, Frege înțelege obiectivitatea în sensul tare și primar al cuvîntului, ca independență față de conștiința umană. Totodată, Frege atribuie gîndirii funcția de a recunoaște,

de a reconstrui însă nu de a construi domeniul obiectivului, ceea ce, deşi nu presupune o desolidarizare categorică de doctrina kantiană, reprezintă în orice caz o mutare semnificativă de accent într-o chestiune crucială. Epurate de bogatele conotaţii gnoseologice din scrierile lui Kant, termenii „obiectiv" şi „real", chiar dacă vor fi fost împrumutaţi de Frege direct sau în ultimă instanţă de la Kant, ajung să propună o ontologie realistă, distanţată atît de excesul platonician cît şi de constructivismul transcendental-subiectiv kantian. În concordanţă cu acest mod de a înţelege ontologia lui Frege se află refuzul de a echivala obiectivul cu realul.

[70] Argumentul materialismului dialectic nu este altul; pare destul de evident că Frege raţionează aici la un nivel superior materialismului istorico-naturalist al epocii. Printre puţinii contemporani în măsură să aprecieze un asemenea raţionament s-ar fi putut număra Engels.

[71] Sensul acestei observaţii pierde din încărcătura sa specific kantiană, dacă reţinem că pentru Frege „elementul legic, conceptual, judicabil" nu este opera intelectului, nu este operă umană, nu este rezultatul unei construcţii a subiectivului individual sau măcar a subiectului generic. Să menţionăm, totodată, că o conotaţie a „obiectivului" este, potrivit lui Frege, capacitatea de a fi comunicabil. De unde am putea specula că obiectivitatea în sensul tare este chiar pentru logicianul de la Jena garantul şi suportul obiectivităţii în sensul mai slab de a fi cognoscibil, de a fi accesibil şi acelaşi pentru toţi.

[72] „Evaluarea estetică" trimite aici, de bună seamă, la ceea ce este dincoace de frumos sau urît, la accepţia primară a „esteticului", restituită de Kant: receptare prin simţuri, sensibilitate.

[73] *Gedankenexperiment-ul* imaginat de Frege merge dincolo de Kant, întrucît îşi propune să arate că elementul subiectiv înglobat în orice intuiţie sensibilă este depăşit prin opera raţiunii, fără concursul unui element *a priori*. Subiectiv, pentru Frege, este ceea ce prin excelenţă poate fi într-un fel sau altul, pentru cineva sau altcineva, în timp ce obiectiv este ceea ce se prezintă ca acelaşi pentru toţi. Subiectivitatea senzaţiei este depăşită în

obiectivitatea gîndirii. În timp ce traducerea cuvintelor în intuiții proprii constituie o decodare subiectivă, traducerea intuițiilor proprii în cuvinte asigură comunicarea unui conținut obiectiv. În folosirea lor primordială, cuvintele au același sens pentru toată lumea, tocmai pentru că sensul lor nu stă în intuiția specifică ce traduce cuvîntul în lumea interioară a unei ființe raționale sau alta; judecățile adevărate (spre pildă teoremele geometrice) ajung a fi recunoscute ca adevărate de către toată lumea, inclusiv de ființe raționale ale căror intuiții spațiale diferă în mod radical de ale noastre, fiindcă cuvintele își păstrează același sens. Dar aceasta presupune nu numai faptul că în cuvînt este reținut, spre a fi comunicat, elementul comun al intuițiilor diferite (diferența dintre intuițiile sensibile provenite din una și aceeași sursă nici măcar nu se lasă descrisă nemijlocit în cuvinte, deși putem să facem aluzie la ea în discurs), acest element comun fiind înțelesul, același pentru toți, al cuvîntului; mai trebuie să presupunem și că sensul cuvintelor trebuie căutat în contextele propoziționale în care intră. Într-adevăr, ar fi cu neputință a ne sustrage următoarei alternative: sau înțelesul cuvintelor este condamnat să fie diferit, în funcție de reprezentările și intuițiile diferite care le sînt asociate (ceea ce Frege nu admite decît parțial, el trasînd o distincție între sensul cuvintelor și nuanțele, coloritul lor specific — a se vedea „Despre sens și semnificație"), sau înțelesul cuvintelor va fi același pentru toată lumea. Or, înțelesul trebuie să fie același, de vreme ce comunicarea între oameni prin intermediul limbajului și cunoașterea adevărului obiectiv sînt indiscutabile. În al doilea caz, cel admis și de Frege, rămîne un mister cum cuvintele ar mai putea păstra același înțeles, — intuițiile asociate cuvîntului izolat fiind diferite — dacă acest înțeles nu ar fi contribuția adusă de cuvîntul izolat nu numai la sensul dar și la adevărul unor propoziții. Prin faptul că recunoaștem adevărul unor judecăți comunicate în propoziții dovedim că putem depăși subiectivitatea intuiției, plasîndu-ne pe un teren comun tuturor ființelor raționale. Principiul contextualității semnificației este, cum vedem, angajat la rîndul său în această încercare de explicație.

[74] Dependența obiectivității față de rațiune este de ordin gnoseologic, nu ontologic; Frege însuși nu spune, în fond, altceva.

Raţiunea nu este aici demiurgul, ci temeiul; ea recunoaşte ceea ce este adevărat, independent de conştiinţa umană, ajunge astfel la ceea ce este obiectiv, corectînd acolo unde este cazul subiectivitatea intuiţiei sensibile. Raţiunea recunoaşte şi cunoaşte ca atare ceea ce este *în afara* subiectului, de exemplu numerele. Astfel, în recenzia cărţii lui Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, Frege caracterizează numerele „în sine", numerele „reale" ca numere obiective, *întru totul independente faţă de gîndirea noastră* (în ediţia *Kleine Schriften*, Georg Olms, 1967, la pp. 191—192).

75 Oskar Schloemilch (1823—1901), matematician german, autor al mai multor manuale şi cursuri care s-au bucurat de o largă circulaţie în epocă.

76 Frege consideră că înţelesul *(Bedeutung)* unui cuvînt nu este subiectiv, nu aparţine intuiţiei individuale; tocmai de aceea semantica fregeană nu rămîne tributară subiectivităţii. Vezi şi nota 73. — Aceeaşi idee este întrucîtva modificată în „Despre sens şi semnificaţie", unde Frege admite că suprapunerile de nuanţă sau colorit peste sensurile cuvintelor din limbajul natural sau poetic ţin de facultatea reprezentării, ele fiind însă comunicabile, adică accesibile mai multor cugete umane.

77 Frege înţelege „mulţimea" (Menge) nu în sensul teoriei mulţimilor, ci ca „multitudine", „pluralitate" în accepţia naivă a acestor expresii; este firesc de aceea, că zero şi unitatea nu pot fi înţelese ca „mulţimi" în accepţia de mai sus.

Angelelli aminteşte (*op. cit.*, p. 249) că încă Simplicius, comentatorul grec, făcuse observaţia că zero şi unu nu pot fi numere în cazul cînd numerele sînt mulţimi de unităţi. Contemporan cu Frege, Husserl va relua la rîndul său în a sa *Filosofie a aritmeticii* din 1891, afirmaţia după care zero şi unu nu sînt propriu-zis numere, ci „răspunsuri negative la întrebarea «cîţi?»". Frege explică pe larg în recenzia opusului husserlian, în ce constă aici eroarea logică. Frege face însă abstracţie de o întreagă tradiţie filosofică şi logică, înăuntrul căreia mulţimea era privită ca extensiune a unui concept, fiind astfel înţeleasă ca clasă în sens logic; admiterea clasei vide şi a claselor cu un singur element nu mai era o noutate în epoca lui Frege, dar nici nu era unanim admisă. Pentru Frege, extensiunea conceptelor înseamnă cu totul

altceva decît „mulțimea". Frege privea „mulțimile" ca pe formațiuni gregare, rău definite din punct de vedere logic, lipsite de structură intrinsecă. În consecință, el preferă să vorbească despre concept sau despre extensiuni ale conceptelor; mulțimile sînt pentru el surogate ale extensiunilor de concepte.

[78] Carl Johannes Thomae, matematician german, profesor la Universitatea din Jena între 1879—1921. Mai tîrziu Frege a combătut în repetate rînduri cu o vehemență neobișnuită concepția formalistă prehilbertiană a lui Thomae, potrivit căreia matematica ar fi un joc după reguli arbitrare cu simboluri neavind semnificație. Numerele erau privite ca semne perceptibile lipsite de semnificație, încît nu se mai punea problema de a ști „ce sînt numerele și ce trebuie ele să fie", ci numai după care reguli de operație manipulăm simbolurile numerice. Asupra polemicii lui Frege cu Thomae, a se vedea, de exemplu, M. și W. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, pp. 82—85.

[79] „*Unitatea* este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu. Iar *număr*, o mulțime compusă de unități" (Euclid, *Elemente*, vol. II, traducere de Victor Marian, București, 1940, p. 5). Vezi și nota traducătorului despre definiția unității și a numărului la greci (*vol. cit.*, p. 220). Se menționează că „la sfîrșitul veacului trecut concepția numărului a fost supusă unei critici riguroase de către mai mulți matematicieni", citîndu-se numele lui Grassmann, Weierstrass, R. Dedekind, Cantor, Peano, Enriques, nu însă și cel al lui Frege.

[80] Frege acordă o pondere deosebită în economia cărții sale analizei numărului unu, convins fiind că aici se poate detecta un aspect deosebit de vulnerabil al concepțiilor combătute; tocmai simplitatea desăvîrșită care pare a fi apanajul numărului unu complică enorm lucrurile, creînd iluzia identificării obiectelor cu unități.

[81] Această observație constituie debutul unei analize logico-gramaticale a înțelesului unor cuvinte ca „unu", „unitate", „unitar" ș.a. (§§ 29—33); Frege excelează în asemenea analize, după cum ne vor dovedi și alte pasaje din *Fundamentele aritmeticii*. În Frege putem descoperi un precursor al filosofiei analitice de astăzi, un practicant al examenului expresiilor limbii în

lumina criteriilor logice; însă aici avem numai un element din bogatul arsenal de mijloace, o parte la care nu este îngăduit să reducem întregul. Analiza fregeană a limbajului, în același timp o critică a limbii și o elucidare a conținutului pozitiv din determinațiile lingvistice, este pusă în slujba unei concepții filosofice mai cuprinzătoare.

[82] Remarca lui Frege este slujită suplimentar de faptul că în unele limbi, printre care germana, determinativul adjectival este pus de obicei înaintea expresiei substantivale „eine Stadt", „weiser Mann". Traducerea noastră nu a fost în măsură să redea această trăsătură.

[83] Legea raportului invers dintre sfera și conținutul unui concept, așa cum o cunoaștem din logica tradițională.

[84] Determinările redundante sînt de obicei evitate în folosirea limbajului obișnuit; ca atare „unu" trebuie să spună ceva nebanal, netautologic. — Pornind de la o premisă analoagă. Frege va ajunge mai tîrziu la concluzii fructuoase privitor la altă determinare, aparent tautologică, și anume aceea a identității. Dacă un lucru este identic numai cu sine și diferit față de oricare altul, ce rost și ce conținut mai poate avea o propoziție de identitate? Răspunsul a fost aflat în distincția sens-semnificație.

[85] Argumentație tipic fregeană, reluată în decursul întregii opere: gîndirea noastră nu poate crea *ex nihilo*, dar nici nu poate face abstracție de ceea ce este prezent. „Modul nostru de a vedea lucrurile" poate afecta numai reprezentările noastre, nicidecum însă obiectele sau conceptele.

[86] „Existența și unitatea sînt alte două idei sugerate intelectului de fiecare obiect dinafară și de orice idee din interior" (Locke, *Eseu*..., Cartea II, cap. VII, § 7; în ed. rom., vol. 1, p. 108).

[87] Abstracția nu se dobîndește prin refuz de a gîndi; Frege ironizează în diferite ocazii această echivalare ilicită, deosebit de propice psihologismului. Atunci cînd totul devine reprezentare, va scrie el, „putem să modificăm cu cea mai mare ușurință obiectele, prin îndreptarea sau abaterea atenției. Îndeosebi aceasta din urmă este eficace. Dacă privim mai puțin la o însușire, ea dis-

pare. Lăsînd astfel să dispară o notă după alta obținem concepte tot mai abstracte. Așadar, conceptele sînt și ele reprezentări, însă mai puțin complete decît obiectele; ele mai au proprietăți ale acelora de care încă nu am făcut abstracție. Lipsa de atenție este o forță logică extrem de eficientă; poate că așa se explică și felul distrat de a fi al savanților" (*Rezension*: HUSSERL, *Philosophie der Arithmetik*).

[88] Prin „unitate" se poate înțelege fie numărul unu, fie însușirea de a fi indivizibil, fie orice obiect, considerat ca unu. Frege își propune să infirme definiția euclidiană a numărului ca mulțime de unități, pentru toate interpretările ce se pot da cuvîntului „unitate". În joc este acum înțelegerea „unității" ca obiect oarecare; se va demonstra că ajungem în egală măsură la dificultăți în cazul cînd unitățile se consideră identice și în cazul opus cînd se consideră distincte. Din infirmarea ambelor ipoteze va rezulta o nouă perspectivă asupra raportului concept-obiect.

[89] Criteriul la care se face aici aluzie este, desigur, un concept sub care cad ambele obiecte. Potrivit unui asemenea criteriu — și ne putem reaminti aici etimologia cuvîntului — cele două obiecte sînt *judecate* la fel.

[90] Hobbes, *op. cit.*, Dial. I, p. 16.

[91] Hume, *Enquiry Concerning Human Understanding*, Sect. XII, partea a III-a, § 131.

[92] Procesul prin care dobîndim un concept sub care cad lucruri numărate nu trebuie confundat cu acela prin care dobîndim însuși numărul respectiv. Cum ajungem, dealtfel, *naturaliter*, la acest număr nu-l interesează pe Frege, ci numai ceea ce *este* numărul. — Lucrurile vor fi, așadar, denumite *unități* nu întrucît sînt numărate, ci întrucît cad sub un același concept (măcar sub conceptul ad-hoc de „lucru supus, *hic et nunc*, numărării"). Conceptul face din lucruri unități, el propriu-zis este unitatea (a se vedea § 54, alineatul doi).

[93] A spune că numărul este o mulțime de unități identice îi pare lui Frege un mod nefericit de a spune că mai multe lucruri distincte cad sub unul și același concept. Frege elucidează definiția numărului în lumina raportului dintre unu și multiplu,

identitate şi diferenţă, concept şi obiect. Critica formulărilor inexacte, în scopul scoaterii la iveală a miezului lor raţional, funcţionează aici în mod exemplar.

[94] *Eseu*..., Cartea a II-a, cap. XVI, § 5; ed. rom., vol. I, p. 185.

[95] Criteriul logico-gramatical prin care identificăm expresiile care desemnează obiecte. Expresia „numărul unu" este, din punct de vedere logic, nume propriu. Frege apelează în repetate rînduri la acest criteriu. Totuşi, identificăm numele propriu nu numai în lumina acestui criteriu, ci şi prin alte metode, de exemplu prin faptul că acesta nu poate fi utilizat ca predicat, ci numai ca subiect al unei enunţări.

[96] Am tradus aici „Begriffswort", expresie care revine frecvent sub pana lui Frege, prin „termen conceptual"; în alte locuri am mai folosit şi denumirea „nume conceptual" etc. Admiterea pluralului este criteriul logico-gramatical care ne permite să constatăm că o expresie lingvistică desemnează nu un obiect, ci un concept.

[97] Tocmai de aceea nici „determinarea numerică" (aserţiunea numerică: Zahlangabe), judecata prin care stabilim numărul obiectelor subsumate unui concept dat, nu poartă direct asupra colecţiilor de obiecte. În recenzia sa la *Husserl: Philosophie der Arithmetik*, Frege găseşte prilejul de a reveni la concepţia eronată îmbrăţişată şi de Husserl; observînd că o colecţie se lasă descrisă prin intermediul conjuncţiei „şi", Frege constată că „determinările numerice" nu au de obicei forma „A şi B şi C şi ... Q sînt *n*", propoziţiile de ultima formă fiind extrem de rar utilizate, iar atunci în scopuri cu totul diferite de acela al stabilirii unui număr. Cu acest prilej, Frege precizează: „În realitate, noi nu întrebăm „cît fac Caesar şi Pompei şi Londra şi Edinburg?" sau „cît fac Marea Britanie şi Irlanda?", iar în ce mă priveşte sînt curios să aflu ce răspuns ar da la aceasta autorul. Întrebăm, din contra, „cîţi sateliţi are Marte?" sau „care este numărul sateliţilor lui Marte?" şi răspunsul „numărul sateliţilor lui Marte este doi" ne instruieşte pe măsura întrebării. Vedem, prin urmare, că atît în întrebare cît şi în răspuns apare un nume conceptual sau o expresie conceptuală compusă, iar

nu acel „şi" pe care îl cere autorul" (în *Kleine Schriften*, 1967, p. 185).

[98] Parafrazînd cinica spusă după care limba i-ar fi dată omului spre a-şi ascunde gîndurile, cineva ar putea nota, în marginea observaţiei lui Frege, că limba este uneori dată spre a camufla dificultatea de a gîndi.

[99] Lui Frege nu-i scapă deci fenomenul fetişizării unor construcţii lingvistice; analiza logico-filosofică trebuie să înlăture vălul mistificaţiilor care acoperă adevărul ascuns în determinările limbii. Frege vine cu o altă mentalitate decît aceea a pozitivistului care, denunţînd speculaţia metafizică drept absurditate goală, nu-şi mai pune în nici un chip problema recuperării sensului ei raţional.

[100] Hobbes, *loc. cit.*, p. 45.

[101] Leibniz, *loc. cit.*, p. 31.

[102] O concepţie diametral opusă asupra rolului timpului în matematică împărtăşeşte intuiţionismul brouwerian. Punînd la baza conceptului de număr natural intuiţia temporală, intuiţionismul filosofic în fundamentele matematicii înţelege să asocieze construcţiei şi devenirii, temporalitatea într-o tentativă de a explica „partea exactă a gîndirii umane", *id est* matematica.

[103] De ordin spaţio-temporal sînt *obiectele concret-senzoriale*, adică obiectele care au *realitate*, vrea să spună Frege; or, obiectează el, numărul este aplicabil prin intermediul conceptului la (colecţii de) obiecte oarecare subsumate acestui concept (conceptul însuşi fiind obiectiv, dar neavînd „realitate"). — De la Kant putem prelua însă observaţia importantă că spaţiul şi timpul sînt totodată condiţii constitutive ale oricărei *experienţe posibile*. Tentativele de a funda *epistemic* (nu psihologic!) aritmetica pe experienţa subiectului, conţin, de bună seamă, un element raţional; sub rezerva unei interpretări non-subiectiviste a experienţei, înţelegerea numărului natural ca o construcţie în experienţa posibilă a subiectului nu mai poate fi incriminată ca psihologistă. Or, invocarea spaţiului şi timpului ca factori constitutivi ai experienţei posibile pare inevitabilă. Atunci cînd nu acceptă o asemenea abordare, Frege nu este numai antipsihologist în forţă.

Prevalîndu-se de faptul că conceptul, obiectiv fiind, nu este totuşi de ordin spaţial sau temporal, Frege ocoleşte posibilitatea unei abordări epistemice, mai largă decît aceea strict logică, a problemei numărului. În ultimii ani ai vieţii sale, cînd Frege va abandona logicismul, el se va adresa „sursei cognitive geometrice" (die geometrische Erkenntnisquelle) într-o nouă încercare de a rezolva enigma numărului. — Nu este de prisos să remarcăm, încă o dată, împotriva supraevaluărilor actuale ale elementelor kantiene din *Fundamentele aritmeticii*, că, deşi Frege a evitat o confruntare directă între concepţia logicistă şi concepţia lui Kant despre număr, delimitarea categorică faţă de Kant nu poate scăpa nimănui. Pentru Frege, numărul nu este o construcţie, ci o entitate *dată*. Ceea ce construim noi nu este numărul, ci numai definiţia lui.

[104] Se observă că Frege evită a angaja o discuţie în termeni kantieni asupra *intuiţiei* spaţiului şi timpului, intuiţie în care, ca într-un mediu unificator, punctele spaţiului sau ale timpului ar manifesta *a priori* identitatea cerută, diferenţiindu-se numai prin poziţia ocupată. Încă o dată, limbajul fregean porneşte de la constatări realiste, eschivîndu-se de la tot ce ar putea sugera constructibilitatea, à la Kant, a obiectelor matematicii din intuiţii asupra experienţei posibile.

[105] Un adversar al punctului de vedere logicist ar putea însă obiecta: „dreptul *logic* de a vorbi despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obişnuit" îl avem, de bună seamă, însă numai întrucît acest număr este corect definit; cu alte cuvinte, numai întrucît este *în principiu* posibil să construim un şir de 45 milioane elemente, de exemplu să construim şirul numerelor naturale 1, 2, ... 45 milioane...; în termenii d-voastră chiar, aceasta revine la posibilitatea de a construi definiţia numărului 45 milioane; dar această posibilitate a definirii numărului respectiv nu trebuie onorată efectiv — din fericire, pentru că a formula definiţia efectivă potrivit indicaţiilor pe care le-aţi dat mai încolo, în *Fundamentele aritmeticii*, ar fi oarecum incomod." — În faimoasa lui polemică cu Russell, Poincaré a adus în esenţă această obiecţie împotriva definiţiei logiciste a numărului.

[106] Comentariul lipsit de simpatie la adresa demersului lui Schröder ca şi alte pasaje din *Fundamente* îl înfăţişează pe Frege în postura de antiformalist radical. Privind înapoi se poate spune totuşi că în poziţia antiformalistă a lui Frege intră un element caduc. Argumentul lui Frege, după care a explica simbolul numeric nu înseamnă a explica însuşi numărul, întrucît acesta din urmă nu este un semn, rămîne valabil numai dacă excludem *modelele semiotice* din rîndul *demersurilor explicative*. Or, în secolul nostru o asemenea excludere este extrem de discutabilă; încă de mult s-a intuit (Schröder nefiind aici decît unul dintre părtaşii acestei intuiţii) că o bună notaţie a numărului natural (notaţia fiind deja în anumite condiţii un model semiotic) ar putea manifesta structura acestuia — întrebarea dacă structura numărului este tot una cu esenţa acestuia rămînînd deschisă. Programul formalist hilbertian a evidenţiat interesul metamatematic şi în cele din urmă pur matematic al unei asemenea notaţii: însemnătate are aici nu utilizarea efectivă a notaţiei, ci posibilitatea ei principială. Preocupat cum este de instituirea definiţiei logice a numerelor, Frege nu face dreptatea cuvenită demersului semiotic în matematică, ceea ce nu constituie numai o delimitare faţă de punctul de vedere advers, ci şi o îngustare — la urma urmelor o contrazicere — a propriilor premise: gîndul mare al unei *lingua characterica*, preluat de la Leibniz, nu este împins de Frege pînă la proiectul unei notaţii lămuritoare pentru număr, notaţie care ar suplini chiar definiţia numărului. Inutil să adăugăm că această observaţie nu vizează decît *implicaţiile* argumentaţiei fregeene, aşa cum ele s-au explicitat mult mai tîrziu, în cursul *acestui* secol. Pentru un geniu ca Frege, faptul de a nu fi întrevăzut această cale a constituit un stimulent puternic în explorările sale pe cealaltă cale.

[107] Obiecţia lui Frege pleacă, după opinia noastră, de la o neînţelegere: a face abstracţie de natura diferenţelor nu comandă cuprinderea lor simultană. Cu tot atîta drept s-ar putea replica: în definiţiile ce vor urma ale numerelor naturale ca obiecte logice sau în analiza aserţiunilor numerice este de asemenea presupusă existenţa unor diferenţe, căci în definiţii sau explicitări apar clauze (subformule) de tipul: $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, ş.a.m.d. Atunci cînd utilizăm numerele, aceste „forme ale dife-

renței" sînt gîndite implicit, căci o definiție — potrivit doctrinei fregeene — nu face decît să expliciteze ceea ce era dinainte dat; dificultatea cuprinderii simultane a mai multor diferențe poate fi regăsită acolo unde ne-am aștepta mai puțin.

108 Prin afirmația de aici, Frege precizează că propriul său demers este pur logic, nu epistemologic.

109 Frege ia *à la lettre* caracterizarea lui Jevons a numărului ca „forma vidă a diferenței", procedînd cu acrimonie matematică și fără cea mai mică indulgență filosofică. Desigur că „a ≠ b" își trădează inadvertența dacă o luăm ca presupusă definiție a numărului doi. Însă atunci cînd afirmăm: „Pămîntul are doi poli", noi mai afirmăm potrivit lui Frege: există un obiect *a* care este pol al Pămîntului, există un obiect *b* care este pol al Pămîntului și *a* este distinct de *b*. — Critica fregeană vizează însă în mod îndreptățit imprecizia sugestiei lui Jevons că numărul ar *abstrage* diferențele dintre obiectele unei colecții într-o formă pură a diferenței ca atare.

110 Într-adevăr, întrucît nu lucrurile sînt suportul numărului, acest suport trebuie căutat în altă parte; el va fi găsit în concept.

111 „Caracterul vag" al expresiilor menționate se datorează faptului de a nu fi determinate prin concept.

112 În ipoteza că numărul este o mulțime de unități.

113 Din nou este pus în joc principiul contextualității semnificației. Totodată este presupusă aici echivalența celor două întrebări: „ce este numărul?" și „ce semnificație are un numeral?" Aplicarea originară a numărului constă, desigur, în numărarea unei colecții de obiecte. Frege nu se adresează însă direct actului numărării, ci indirect, prin intermediul acelei forme de judecată pe care o numește *Zahlangabe*, adică aserțiunea sau determinarea numerică („Zahlangabe" se mai poate traduce prin „indicație numerică").

114 Argument tipic fregean, izvorît din marile tradiții ale filosofiei germane; acolo unde logicianul nominalist ar fi fost pregătit să resoarbă conceptele în termeni, profesorul de matematici

de la Jena înţelege termenii ca vehicule ale conceptelor, ceea ce îi permite să stabilească rezultatul important de mai jos.

[115] Acesta este primul rezultat fundamental de natură afirmativă pe care Frege îl stabileşte cu privire la număr. După cascada infirmărilor de pînă acum, critica logico-filosofică va trece în construcţie solidă. Dar caracterul polemic al argumentaţiei lui Frege nu rămîne, în continuare, mai puţin manifest — dacă nu altfel, atunci cel puţin prin minuţiozitatea cu care sînt preîntîmpinate eventuale obiecţii. În ceea ce priveşte formularea: *Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe*, să amintim că termenul *Aussage*, pe care l-am tradus aici prin *enunţ*, semnifică în genere *ce se spune despre* un posibil subiect al rostirii, dar astfel ajunge să însemne în germană pînă şi *predicat*. Ar fi însă impropriu de a înţelege *Zahlangabe* ca o judecată de forma subiect-predicat, în care numărul este enunţat ca predicat al unui concept. Vom vedea mai jos desluşirile pe care le dă Frege. Într-o parafrază liberă, *dictum*-ul fregean s-ar limpezi astfel: atunci cînd dăm un număr spunem ceva despre un concept. Acceptînd acest principiu, racordul dintre aritmetică şi logică, via număr-concept apare mult mai firesc decît introducînd *ex abrupto* doctrina logicistă. E de mirare cum logica filosofică nu a poposit mai stăruitor în preajma acestui principiu fregean, atît de prielnic speculaţiei filosofice, ci, urmînd mersul ideilor în curgere matematică, a acceptat cu umilinţă faptul că matematica se reazemă pe o *teorie a mulţimilor*, nicidecum pe una a conceptelor. S-a întîmplat deci că repunerea în drepturi a conceptului a fost de scurtă durată; în mod fatal, este preferabil să vorbim direct despre clase sau colecţii, încît determinarea numerică este înţeleasă ca enunţînd ceva despre o mulţime. Pe de altă parte, dificultăţile fundaţionale au împins tot către un mod de exprimare nominalist, astfel că vorbim despre termeni conceptuali şi nu despre concepte.

[116] Asupra expresiilor care sînt funcţie de timp, Frege revine în „Ce este o funcţie?" (în volumul de faţă, la p. 319). Problema logică legată de asemenea expresii este elucidată astăzi în semantica lumilor posibile. Exemplul propus de Frege îl putem trata, rămînînd în limitele semanticii fregeene, în două maniere deo-

sebite. Sau spunem că „locuitor al Germaniei“ nu are semnificație decît dacă precizăm timpul, iar atunci expresia *indică în mod nedefinit* un concept; sau tratăm „locuitor al Germaniei“ ca expresie ce desemnează o relație, adică funcție avînd două argumente și luînd ca valoare adevăratul sau falsul, funcție din care, prin fixarea argumentului potrivit (în exemplul de față „prima secundă a anului 1883, ora Berlinului“) obținem o expresie pentru un concept propriu-zis, adică pentru o funcție de un argument, care ia valori de adevăr ca valori pentru diversele sale argumente (asupra distincției precise între concepte și relații, vezi în scrierea de față § 70, precum și „Funcție și concept“, îndeosebi p. 267).

117 Relația de subordonare a conceptelor respective se exprimă în ceea ce logica tradițională numește propoziții universal-afirmative: „Orice corp este greu“, „Toate balenele sînt mamifere“. Relația de subordonare a conceptelor trebuie deosebită de relația logică a căderii obiectului sub concept. În logica predicatelor, ea își găsește expresia în ceea ce Russell numește implicație formală; formula $(x)(A(x) \rightarrow B(x))$ este o atare implicație.

118 Ceva obiectiv înseamnă aici, desigur, ceva preexistent și astfel independent de reprezentările și operațiile logice ale subiectului. „... După părerea mea — scrie Frege în altă parte — aducerea unui obiect sub un concept constituie numai recunoașterea unei relații care subzista anterior“ (*Rezension: Husserl, Philosophie der Arithmetik;* vezi *Kleine Schriften*, pp. 181—182). Deși aici este vorba de o relație logică diferită, nu încape îndoială că aceeași caracterizare rămîne valabilă.

119 Cu alte cuvinte, propoziția pare să trateze despre lucruri individuale, nu despre proprietăți generale ale lucrurilor individuale.

120 Afirmația pare banală, însă Frege — cum se lămurește imediat mai jos — o interpretează în sensul că nu putem vorbi despre obiecte fără a folosi nume proprii. În felul acesta, el se delimitează de întreaga semantică tradițională.

121 Dezvoltîndu-și punctul de vedere în contextul polemicii cu Husserl, Frege aduce următoarea precizare: „Dacă l-am desemna

pe Hans prin «om» şi la fel pe Kunz, atunci am comite într-adevăr eroarea desemnării unor lucruri distincte prin una şi aceeaşi denumire. Din fericire, noi nu procedăm astfel. Atunci cînd îl numim om pe Hans spunem prin aceasta că Hans cade sub conceptul *Om*, însă nu scriem şi nu spunem «om» în locul lui «Hans» ... Atunci cînd pe A îl numim B în sensul că îi conferim lui A numele propriu «B» putem, fireşte, să spunem întotdeauna «B» în loc de «A»; dar atunci nu mai putem da unui alt obiect acelaşi nume «B». De această confuzie se face vinovată expresia nefericită de «nume comun». Acest aşa-zis nume comun — care ar trebui denumit mai curînd termen conceptual *(Begriffswort)* — nu priveşte în mod direct obiectele, ci semnifică un concept; sub acest concept cad, eventual, obiecte; dar el poate fi şi vid, fără ca din acest motiv termenul conceptual să aibă mai puţin o semnificaţie. În § 47 din ***Fundamentele aritmeticii*** am prezentat încă de mult această concepţie. Este într-adevăr clar că propoziţia «Toţi oamenii sînt muritori» nu este folosită de cineva cu referire la un anumit şef de trib Akpanya despre care poate că nici nu a auzit" (*Rezension: Husserl, ...*, în *op. cit.*, p. 188).

122 Din nou, o delimitare faţă de gnoseologia kantiană, în care apercepţia este izvor subiectiv al cunoaşterii şi principiu unificator al materialului divers al reprezentărilor. Caracterizată de Kant ca „identitatea universală de sine în toate reprezentările posibile", apercepţia sintetică face din conştiinţa de sine garantul unităţii introduse în diversitatea elementelor cunoaşterii. „Posibilitatea formei logice a oricărei cunoaşteri — tot pentru Kant — se întemeiază necesar pe raportul cu această apercepţie *ca o facultate*" (*Critica raţiunii pure*, ed. rom., 1969, pp. 158, 161). Lui Frege, un asemenea punct de vedere îi apare inacceptabil. Prin faptul că un concept este obiectiv — ceea ce înseamnă că îl descoperim, nu-l şi creăm — el are de la bun început priză asupra obiectelor: *el* le „judecă", reţinînd în sita sa extensiunea, obiectele cărora le revine, aşadar cărora le aparţine ca proprietate. Atunci cînd numărăm se presupune că am deosebit obiectele unei colecţii ca aparţinînd tocmai acesteia şi deci ca satisfăcînd un anumit criteriu, care nu este neapărat acela al agregării într-un spaţiu limitat, de exemplu în orizontul vizual al unui

ins; criteriul nu este altul decît conceptul. Puterea de strîngere laolaltă a conceptului se întemeiază pe relaţia logică a căderii obiectelor sub concept.

[123] Spinoza este unul din puţinii filosofi la care Frege a putut găsi o anticipare a propriei sale concepţii despre număr. Într-un manuscris rămas de la Frege şi editat recent, găsim următoarea însemnare sarcastică: „Obstacolele cu care trebuie să lupte progresul general arată că autori ai timpului nostru — printre care pînă şi istorici ai filosofiei, de exemplu K. Fischer (cf. *Fundamentele* mele, Introd.) — procedează ca şi cum pe tărîmul acestor probleme omenirea ar fi dormit pînă astăzi şi abia acum îşi freacă ochii înneguraţi, cînd, de fapt, gînditori de valoare unanim recunoscută, cum este Spinoza, au exprimat încă de mult idei pregnante despre număr. Dar pe cine să-l intereseze ce spune Spinoza despre un lucru ca acesta, care e la mintea copiilor?" („Über den Begriff der Zahl. 1. Auseinandersetzung mit Biermann", în *Nachgelassene Schriften*, p. 93).

[124] Spinoza, Scrisoarea către *Ludwig Meyer* din 20 aprilie 1663 şi Scrisoarea către *Jarigh Jelles* din 2 iunie 1674.

[125] Conceptele se obţin mai întîi prin abstracţie, proces semiotic caracterizat în altă parte de către Frege ca desprinderea din mai multe lucruri, distincte dar asemănătoare, a ceea ce au ele comun şi ca desemnare a acestui element comun printr-un semn; dar mai putem forma concepte noi pe baza conceptelor aflate în prealabil la dispoziţia noastră. Pentru aceasta pornim de la *notele* unor concepte date (asupra notelor şi a distincţiei notă-proprietate, vezi § 53), combinîndu-le, de exemplu, prin intermediul unor particule logice ca „şi", „sau", „nu" ori prin alte procedee mai complicate. Importanţa contribuţiei lui Frege la teoria conceptului este legată de faptul că marele logician german a întrevăzut posibilitatea ajungerii la concepte noi, „pornind de la note", prin procedee diferite de simpla generalizare sau determinare descrise în logica tradiţională. Frege era în măsură să efectueze acest adevărat salt constînd în a pune problema formării de noi concepte în toată generalitatea, întrucît conceptul a fost înţeles de el (i) ca ceea ce se spune despre obiect, predicat posibil (ii) ca desemnat de o expresie (oricît de lungă şi compli-

cată) prin intermediul căreia enunțăm ceva despre obiect și (iii) ca *alcătuit* într-un fel de *notele* sale, așa cum un lucru este din părți, și nu așa cum un lucru este „alcătuit" din însușirile sale. Frege își dă seama că nu avem decît a combina corect din punct de vedere logic diferite expresii care desemnează concepte, spre a obține deja o expresie care va desemna și va defini un nou concept, în cazul cînd în genere expresia se va putea enunța cu sens despre un obiect. În mod analog se pot defini și *relații*, se pot combina expresii pentru concepte și relații în noi expresii care vor desemna concepte sau relații. Expresiile de la care se pornește desemnează *notele* noului concept, introdus printr-o expresie care îl definește nu neapărat prin „genul proxim și diferența specifică". În partea a IV-a a *Fundamentelor aritmeticii* vom întîlni numeroase exemple în acest sens. Astfel, în § 79 se introduce „element al șirului de numere naturale terminat cu *n*" ca expresie desemnînd — pentru un *n* fixat — un anumit concept definit prin intermediul relației de succesiune (sau al relației converse, de precedență); conceptul de număr finit este desemnat prin expresia „... este un număr finit" și definit (§ 83) prin intermediul conceptului desemnat de expresia „este un membru al șirului de numere naturale ce începe cu 0".

126 Conceptul de „cerc pătrat" constituie un exemplu; în matematică, demonstrațiile de existență revin la indicarea faptului că un obiect cade sub un anumit concept, un cuplu de obiecte satisface o relație dată ș.a.m.d.

127 Aici este implicat faptul că o propoziție are sens dacă și numai dacă negația ei are de asemenea sens.

128 Frege revine la observația făcută în § 47; a se vedea și notele 120, 121.

129 Distincția logico-gramaticală între nume propriu și nume sau termen conceptual derivă din distincția fundamentală concept-obiect, enunțată în introducere cu titlul de principiu fundamental.

130 Frege admite deci în logica sa conceptele individuale; acestea au fost admise, de asemenea, în logica tradițională. Un concept individual este un *nomen appelativum* ca oricare alt

concept. Distincției dintre conceptul individual și individul subsumat acestuia îi corespunde distincția dintre clasa cu un singur element și însuși elementul.

131 I. Angelelli găsește că aici avem „cea mai bună formulă utilizată în *Fundamentele aritmeticii* pentru a caracteriza concepte și obiecte (nume de concepte și nume de obiecte)"; este „criteriul «cel bun»" de distincție între concepte și obiecte, avînd ca presupunere subzistența unor entități care pot fi numai referenții relației logice fundamentale de cădere sub concept, entități ce sînt subiectele ultime ale predicației (I. Angelelli, *op. cit.*, p. 157).

132 În germană, cuvîntul „Mond" desemnează nu numai satelitul natural al planetei noastre — semnificat de asemenea prin „Erdmond" —, ci și conceptul de „satelit". Dezambiguizarea expresiei se produce în contextul de utilizare. În limba română, — spre a da un exemplu oarecum înrudit — „soare" este întrebuințat ca nume propriu, însă admite și pluralul „sori", acesta din urmă funcționînd în calitate de termen conceptual, sinonim cu „astru".

133 Trăsătură pe care nu o mai întîlnim în limba română.

134 Încheierea secțiunii 52 deschide către unul din cele mai dense fragmente ale *Fundamentelor*, în care geniul logicianului își găsește o expresie desăvîrșită. Problema în discuție va fi conceptul ca *subiect* al enunțării.

135 Distincția notă-proprietate este introdusă de Frege în scopul depășirii unei dificultăți de care se ciocneau o seamă de teorii anterioare asupra numărului. Acestea priveau numărul ca notă a unui concept; de fapt însă, numărul revine conceptului ca (obiect derivat dintr-o) proprietate a acestuia. Teoria tradițională a predicației privea nota ca proprietate a conceptului, omițînd distincția. Or, deosebirea formală dintre relația de subordonare între concepte și relația de cădere a unui obiect sub un concept impunea și noua distincție. Dacă A este subordonat lui B — și deci $(x)\ (A(x) \rightarrow B(x))$ are loc —, atunci B este o notă a lui A, relația fiind între concepte de același ordin; dacă *a* cade sub A, relația este între un obiect și un concept (=o proprietate) și putem scrie în simbolismul logicii predicatelor: A(a); dacă B este o

notă a lui A, şi dacă A(a), atunci B(a); avem aici principiul pe care logica tradiţională îl exprima prin *nota notae est nota rei ipsius* — formularea vădind tocmai confuzia între notă şi proprietate. Ce se întîmplă însă dacă enunţăm o proprietate despre un concept *ca atare?* Atunci, arată Frege, enunţăm o relaţie *analogă* celei de cădere a unui obiect sub un concept (a se vedea şi „Funcţie şi concept"; „Despre concept şi obiect", în volumul de faţă); aşadar, în timp ce *nota* exprimă o relaţie intre concepte de acelaşi ordin, *proprietatea* este legată de o relaţie între entităţi de pe planuri diferite: fie relaţia obiect-concept, fie relaţia concept de ordin unu — concept de ordin superior. Distincţia fregeană este astfel asociată unei ierarhizări a entităţilor şi a expresiilor — o prototeorie a tipurilor, s-ar spune. Cînd vorbim despre proprietatea unui concept nu vorbim şi despre proprietatea obiectelor care cad sub acel concept. Dar *cum* se enunţă o proprietate despre un concept? Şi poate fi conceptul însuşi subiect al predicaţiei? Luat ca subiect al predicaţiei, conceptul nu se va transforma în obiect, estompîndu-se astfel o distincţie fundamentală? Frege a reluat analiza acestor probleme în articolele citate mai sus.

136 Notînd conceptul menţionat prin P( ), propoziţiei îi corespunde formula -(x)-P(x); propoziţia nu are forma subiect-predicat. Negarea existenţei, ca de altfel şi existenţa, nu capătă expresie în propoziţii singulare sau universale (în sensul logicii tradiţionale). Conceptul existenţei şi cel al non-existenţei se exprimă prin cuantor şi negaţie; ele realizează o „predicaţie implicită", nu directă (cf. I. Angelelli, *op. cit.*, p. 181, unde se vorbeşte despre predicaţia implicită de ordin superior).

137 A se vedea secţiunea 75. Nu trebuie uitat că deşi numărul exprimă o proprietate a conceptului, el nu este enunţat ca un concept, ci atribuit (aplicat: *beigelegt)* conceptului de ordin inferior.

138 Frege pune astfel în conexiune ontologia cu numărul, clarificînd prin analiză logică unele speculaţii metafizice ale tradiţiei filosofice.

139 Iată una din aplicaţiile de mare renume ale analizei logice într-un domeniu în care s-au exersat minţi din cele mai subtile,

de la Anselm din Canterbury, autorul faimosului argument ontologic pînă la acel Anselm redivivus care este Descartes, împotriva căruia se ridică energic Kant. O comparaţie între Frege şi Kant (a se vedea capitolul Despre imposibilitatea unei dovezi ontologice a existenţei lui Dumnezeu din *Critica raţiunii pure)* ar evidenţia convergenţa concluziilor şi a unei părţi a argumentaţiei. Frege a concentrat ca într-o rază laser esenţa argumentaţiei lui Kant împotriva pretinsei dovezi carteziene: existenţa nu este un concept al lucrurilor. Definit ca fiinţă atotperfectă, în a cărei esenţă este inclusă şi existenţa, Dumnezeu este un simplu concept. Nu rezultă însă din definiţie proprietatea existenţei unei fiinţe supreme, aşa cum din definiţiile matematice rezultă de atîtea ori numeroase proprietăţi? Nicidecum, întrucît — arată Frege — conceptele se *compun* din notele lor, aşa cum o casă se compune din materialele din care este construită, iar definiţia construieşte un concept din notele, nu din proprietăţile lui, aşa cum noi am zidi o casă din materialele componente şi nu din proprietăţile casei. Existenţa fiind o proprietate a conceptului, nu poate decurge *imediat* din definiţia conceptului; la fel şi unicitatea. Cu aceasta, problema dovezii ontologice este clarificată. Un corolar al concepţiei lui Frege este că existenţa nu poate fi atribuită obiectelor; este, de exemplu, deopotrivă lipsit de sens să spunem că Iulius Caesar există sau nu există (vezi „Despre concept şi obiect", în acest volum, p. 299). Pornind de aici, neopozitivismul a proclamat moartea ontologiei, decretînd problema existenţei ca lipsită de sens şi tributară unei tradiţii perimate. Însă extrapolarea este abuzivă. Rămînînd la aspectele pur logice ale chestiunii (fiindcă raportarea omului la fiinţa lumii prin limbaj nu se rezumă la elaborarea categorială a „existenţei" ca predicat), se poate observa, de pildă, că „X există" poate căpăta un sens, dacă o parafrazăm fie prin „numele propriu «X» are o semnificaţie în domeniul obiectelor reale", fie prin „$\exists y(y=X)$", fie în alte moduri, în funcţie de contextul folosirii. Dacă limba păcătuieşte nu o dată împotriva gramaticii logice, se întîmplă şi ca gramatica logică să preschimbe limitările ei momentane în interdicţii impuse discursului filosofic.

140 De exemplu, conceptul de a fi „identic cu zero", prin însăşi definiţia sa implică admiterea unui obiect subsumat —

acesta este însuşi zero — şi numai unul: existenţa şi unicitatea sînt aşadar proprietăţi ale conceptului amintit (a se vedea § 77). Dar unicitatea şi existenţa nu sînt *note* ale aceluiaşi concept şi nu intră în definiţia lui; în caz contrar, am fi fost obligaţi la aserţiuni ca „orice obiect identic cu zero există", „orice obiect identic cu zero este unul şi numai unul", aserţiuni al căror nonsens a fost în prealabil arătat.

111 Acest concept este desemnat printr-o expresie predicativă de genul „este concept singular". Conceptul „Satelit al pămîntului" este într-adevăr un concept singular (sub el cade un singur obiect), spre deosebire de însuşi satelitul Pămîntului.

112 Frege introduce aici o distincţie importantă pe care în „Funcţie şi concept" o va generaliza pentru cazul funcţiilor în genere (inclusiv relaţii); totodată, în loc de *ordin* (Ordnung) al funcţiei el va folosi mai tîrziu expresia *treaptă* (Stufe). Unii exegeţi văd aici o adevărată teorie a tipurilor *in nuce*, alţii se arată mai rezervaţi fiindcă, pe de o parte, Frege nu sugerează nicăieri că ierarhizarea poate continua indefinit, pentru ordine (trepte) oricît de înalte, iar pe de altă parte, obiectele nu sînt la rîndul lor ierarhizate. Observăm, de asemenea, că ierarhizarea entităţilor nu este însoţită în prezentarea de faţă de o ierarhizare a expresiilor care le desemnează.

113 Primele trei părţi ale *Fundamentelor* sînt tot atîtea etape preparatorii care conduc către *Culminatio:* definirea pur logică a numărului cardinal (Anzahl).

113a Frege nu introduce simboluri pentru a formaliza aserţiunile sale. Dar logica predicatelor ne stă la dispoziţie în acest sens; Frege ar fi putut extinde cu uşurinţă notaţiile din *Begriffsschrift* în vederea unei expuneri strict formale, însă reacţia alergică a publicului de filosofi şi chiar de logisticieni la sistemul său de notaţii l-a îndemnat să recurgă la enunţuri formalizabile, însă nu actual formalizate. Astăzi, revirimentul produs în reacţia publicului faţă de logica simbolică convoacă în mod conformist în direcţia opusă: a da gîndului expresie simbolică, ori de cîte ori claritatea intrinsecă a ideografiei nu obligă la lungirea disproporţionată a frazei simbolice în comparaţie cu aceea din limbajul cuvintelor. Încercînd să formalizăm definiţiile fregeene

avem la dispoziție două procedee. Putem trata numărul drept predicat de predicate, adică drept concept de ordin doi; aserțiunea numerică de forma „numărul *n* revine conceptului F" s-ar exprima atunci printr-o formulă a logicii predicatelor de ordin doi, în genul *n(F)*, subînțelegîndu-se că *n* este o variabilă avînd ca valori predicate care pot lua ca argumente predicate de o variabilă individuală. În particular, pentru *n* putem substitui 1, 2, 3, ... Dar Frege precizează că numărul este obiect, nu concept, iar aserțiunea numerică are caracterul formal al identității (§ 57); în consecință, într-o tratare mai apropiată de aceea fregeană, vom nota prin N[F] *numărul care revine conceptului F*, unde *N*, un functor de un singur argument, este aplicat la concepte spre a produce numerele care revin respectivelor concepte. Potrivit acestor stipulări, vom formaliza în cele două variante enunțul din alineatul 2 al § 55 (fără a apela la simbolismul fregean), după cum urmează:

$0(F) \leftrightarrow (a) \sim F(a)$, respectiv $N[F] = 0 \leftrightarrow (a) \sim F(a)$. Am notat prin F un concept despre care se admite că i-ar reveni numărul zero și am presupus că prin „atunci" din formularea lui Frege este subînțeles „atunci și numai atunci", pentru care am folosit semnul echivalenței $\leftrightarrow$.

[144] Formulele corespunzătoare sînt:

$$1(F) \leftrightarrow \sim (a) \sim F(a) \ \& \ (F(a) \ \& \ F(b) \rightarrow a = b)$$

respectiv

$$N[F] = 1 \leftrightarrow (\sim (a) \sim F(a) \ \& \ (F(a) \ \& \ F(b) \rightarrow a = b))$$

În continuare vom folosi numai ultima manieră de notație, transcriind de exemplu „numărul care revine lui F este *n*" prin formula: $N[F] = n$. De asemenea, vom economisi parantezele, scriind de cele mai multe ori, de exemplu, Fa în locul lui F(a).

[145] $N[F] = (n + 1) \longleftrightarrow (\exists a)(Fa \ \& \ N[F(b) \ \& \ b \neq a] = n)$.

[146] Cu alte cuvinte, explicațiile de pînă acum ne ajută să *traducem* o aserțiune numerică într-o frază al cărei sens este deplin lămurit, însă înțelesul unei sintagme izolate din fraza tradusă, și anume „numărul care revine conceptului F" și la fel înțelesul subsintagmei „număr" ne rămîn necunoscute ca înainte. Știm că numărul unui concept este un obiect, dar nu sîntem încă în posesia unui criteriu de identificare pentru obiectele specifice

care sînt numerele. Acel criteriu ni-l va da abia *definiția* expresiei „numărul care revine conceptului F“. Deocamdată, a fost definită numai expresia „numărul care revine conceptului F este *n*“. Definiția îmbracă o formă inductiv-matematică, altfel spus recursivă: au fost definite mai întîi frazele N[F]=0, N[F]=1 și ni s-a indicat un procedeu general prin care înaintăm de la definiția unei identități de forma N[F]=n la aceea de forma N[F]=n+1. Se observă cu ușurință că trecerea de la definiția unei determinări numerice la definiția numărului însuși este analogă unui proces al gîndirii spontane. Înțelesul unei aserțiuni numerice este considerabil mai accesibil decît înțelesul unei expresii numerice; învățăm să numărăm jucîndu-ne dar putem muri savanți fără să ne fi întrebat măcar ce sînt și ce va să zică— was sind und was sollen — numerele. Ne este de ajuns să putem opera după reguli de calcul și să putem aplica numerele ca să avem sentimentul familiarității cu numerele. Adevărul propozițiilor matematice odată certificat, iluzia că sîntem în posesia deplină a *sensului* lor și că deci știm cumva ce este și numărul ne poate învălui de-a lungul întregii vieți ca acel văl al iluziei, Maya, despre care vorbește tradiția indiană. Din acest somn ne trezește demersul fundamentist. Dar la punctul unde am ajuns acum grație lui Frege se trezește un prilej de adîncă mirare: cum este cu putință ca înțelesul unei fraze să fie clar înainte ca înțelesul tuturor părților componente să fi fost în prealabil elucidat? Or, traducerea (sau explicația) unei determinări numerice de forma N[F] în limbaj logic pare să nu lase dubii în această privință, după cum ne conduce aici și sentimentul nostru că întrebarea operațională: ce număr revine conceptului F? (formulată eventual într-o modalitate laică, de pildă: „cîte mere sînt în grămada de față?“) este considerabil mai simplă decît întrebarea: „ce înseamnă însuși acel număr, oricare ar fi el, despre care spui că este numărul merelor din grămada de față?“. O asemenea uimire se naște însă în preajma lingvisticii și logicii tradiționale cu mentalitatea lor atomistă, potrivit căreia înțelegerea întregului este condiționată în sens unic de înțelegerea părților alcătuitoare. Sîntem conduși acum la o semantică holistă, pe care Frege ne obliga s-o gîndim prin intermediul principiului contextualității. Intuind mai profund *fenomenul* lingvistic (și logic):

judecata trece înaintea conceptului, propoziția înaintea cuvîntului izolat. Dar intuițiile noastre o dată modificate într-un punct vor determina schimbări și în alte puncte ale cîmpului. În mod deosebit va trebui să admitem (întrucîtva *adversus* Frege!) că există *trepte* de înțelegere implicită (dacă se poate spune așa); avem un ghem de posibilități explicative care se poate desfășura într-o tramă explicitatoare a sensului expresiilor incumbate. Sau nu cumva lucrurile stau exact invers? Nu cumva expresiile numerice nu au un sens decît în contextul judecății? Dar faptul că numerele vor fi în cele din urmă definite nu lasă nici o îndoială că principiul contextualității nu are — așa cum am mai spus —, acest sens excesiv, mai curînd russellian decît fregean.

[147] Subiectul real al enunțării nu este întotdeauna desemnat de subiectul gramatical al propoziției (în cazul de față „numărul 0"); și tocmai de aceea distincția subiect-predicat își pierde în ochii lui Frege rolul fundamental de care s-a bucurat în logica tradițională.

[148] Enunțarea, ceea ce se spune despre subiectul real al propoziției, exprimă o proprietate a acestuia; Frege pare să presupună că proprietățile nu sînt și nu se prezintă ca entități independente, spre deosebire de obiecte. Tema este adîncită de Frege în „Despre concept și obiect", prin introducerea distincției între expresii și entități saturate, respectiv nesaturate.

[149] Frege a susținut că în diverse contexte „este" exprimă relații deosebite; cuvîntul poate să trimită fie la relația de cădere a unui obiect sub un concept, fie la relația de subordonare a unui concept față de altul, fie la aceea de identitate, respectiv poate să figureze în cadrul unei propoziții singulare, a uneia universal-afirmative sau a uneia de identitate. În consecință, un simbolism logic corect trebuie să introducă notații distincte pentru cele trei relații semnificate de omonimicul „este". În cazul de față, avem o propoziție de forma pe care am convenit s-o notăm (cf. nota 144) printr-o formulă de genul $N[F]=n$; F va fi deci „satelit al lui Iupiter" iar *n* va lua valoarea 4. Textul de referință în problema lui „este" în logica simbolică rămîne, desigur, *Tractatus logico-philosophicus*, 3.323: „În limba de toate zilele se întîmplă adesea ca unul și același cuvînt să desemneze în moduri cu totul

diferite — şi să aparţină, aşadar, unor simboluri diferite — sau ca două cuvinte care desemnează în moduri diferite să fie la prima vedere folosite în acelaşi mod în cadrul propoziţiei. Cuvîntul «este» apare astfel ca semn al egalităţii şi ca expresie a existenţei; «a exista» — ca verb intranzitiv, asemenea verbului «a merge»; «identic» — ca adjectiv...". Observaţia este însă mai veche şi, în orice caz, Frege se dovedeşte mai puţin econom în materie de explicaţii decît sibilinicul Wittgenstein.

[150] Observaţia trimite imediat la distincţia sens-semnificaţie de mai tîrziu; Frege o elaborează pornind tocmai de la forma identităţii în care prin desemnarea diferită a unuia şi aceluiaşi obiect (aici: „Columb" şi „descoperitorul Americii") obţinem o informaţie sintetică. A se vedea „Despre sens şi semnificaţie".

[151] Am înlocuit *Aur*, corespondentul germanului „Gold" din textul tradus, prin *Fier*, cuvînt care, avînd patru litere, poate reda în limba română exemplul ales de Frege.

[152] Am tradus *das Gewollte* prin „intenţia", prilej de a întrezări că §§ 58—60, unde Frege revine — nu pentru ultima oară — la deosebirea dintre reprezentare şi gîndire conţin o schiţă de analiză *fenomenologică* (sau cumva antifenomenologică). Interesul lui Husserl pentru Frege devine explicabil, logicianul de la Jena practicînd ocazional ceea ce anglo-saxonii numesc *Philosophy of mind*, fie şi numai spre a anexa gîndirii partea defrişabilă a luxuriantei activităţi psihice.

[153] A se reciti în Cuprins titlul secţiunii 60. Explicaţiile lui Frege dezvoltă afirmaţia din *Introducere* după care principiul contextualităţii este comandat de critica aberaţiei psihologiste. Este lesne de înţeles cum exegeţii şi-au putut forma pe baza acestui pasaj părerea că între cel ce a scris *Fundamentele aritmeticii* şi autorul lui „*Über Sinn und Bedeutung*" se cască o falie, semantica fregeană atestînd că şi pentru expresiile izolate de contextul propoziţional am putea găsi o semnificaţie. Chestiunea a mai fost discutată în nota 17. Aici să mai adăugăm trei observaţii. Mai întîi, principiul contextualităţii semnificaţiei este cu deosebire apt de a sluji in matematică, sau în genere oriunde întîlnim judecăţi cu termeni nu observaţionali, ci teoretici, termeni adică „pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare". Semnificaţia unui termen este atunci dependentă nu numai de contextul judecăţilor, ci într-un grad şi mai

înalt dependentă de întregul sistem al conceptelor și judecăților din teoria de referință; iar în afara judecății unele părți componente ale ei nu desemnează în mod independent nimic, funcția lor fiind aceea de auxiliari indispensabili. Exemplul dat de Frege în subsolul alineatului următor, ca și considerațiile sale dintr-un articol de mai tîrziu (1891, deci în preajma lui „Sinn und Bedeutung!") *Despre legea inerției* — acolo Frege spune, în spirit holist, că numai totalitatea postulatelor mecanicii se raportează la experiență—atestă că o asemenea interpretare nu modernizează excesiv gîndul lui Frege. Dar există și un al doilea aspect: cuvîntul *semnificație* (Bedeutung) mai păstrează în *Fundamentele aritmeticii* un uz fluctuant; Frege se luptă împotriva identității *Bedeutung* = *Vorstellung*, iar ca argument în lupta sa împotriva psihologismului face observația *fenomenologică* după care *dacă* înțelegem să asociem judecăților reprezentări, și la fel cuvintelor, *atunci* reprezentarea asociată judecății nu este compusă din reprezentările asociate cuvintelor componente, pentru simplul motiv că nici măcar nu putem asocia fiecărui cuvînt al frazei o reprezentare izolată. Transpare așadar din explicațiile lui Frege asupra principiului său și o teorie holistă asupra amalgamării reprezentărilor izolate în cele globale. Însuși principiul contextualității spune însă și vrea altceva: să asigure obiectivitatea semnificațiilor, conținuturilor, smulgîndu-le din sfera reprezentărilor mentale. În al treilea rînd, s-ar putea ca Frege să fi fost condus la principiul contextualității semnificației și de următoarea observație, pe care *expressis verbis* nu o întîlnim totuși nicăieri în opera sa: putem defini astfel înțelesul unei *Zahlangabe*, încît propoziția obținută să mai conțină cuvîntul pentru concept, dar cuvîntul care desemna numărul să pară a se fi volatilizat fără vreo urmă palpabilă. Traducerea conține așadar un termen conceptual dar în rest numai variabile și constante logice. Într-adevăr, am văzut (§ 57) că, de exemplu, aserțiunea $N[F] = 2$ se definește logic: $(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy \,\&\, x \neq y \,\&\, (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$. Principiul contextualității comportă așadar următorul corolar: traducerea dintr-un limbaj în altul se petrece nu cuvînt cu cuvînt, ci frază cu frază. Un corolar înrudit este: definirea semnificației unei propoziții nu comandă definirea cuvintelor care compun propoziția. Aceste consecințe au fost exploatate de Russell și alți filosofi analiști în direcții cu totul nefregeene.

151 Afirmația poate fi înțeleasă în două feluri: sau că numeralul desemnează numai înăuntrul contextului propozițional, sau că ceea ce desemnează numeralul nu se află în afara contextului propozițional. Prima interpretare este mai plauzibilă. Dar primul

alineat al § 61 va preciza totodată: numerele nu sînt nici înăuntru, nici în afară în sens spațial, nu acceptă determinația locului.

[155] *Objective Gegenstand:* obiect care ne stă în față, obiect prezent.

[156] Obiectivitatea, de-a lungul întregului pasaj, este asociată însușirii de a fi același pentru toți: obiectivitatea în sens slab. Să însemne aceasta că Frege stă sub pecetea lui Kant, cum vor recent unii exegeți? Se uită faptul că Frege a recunoscut în termeni fără echivoc existența obiectelor reale, independente de conștiința umană, independente de reprezentare. Obiectivitatea numărului cea lipsită de realitate nu se rezumă însă nici ea la firea numărului ca unul pentru toți; contextul global pare dimpotrivă să ateste că a fi unul și același este numai un criteriu (de recunoaștere) al obiectivității înțelese ca independență față de conștiința umană. În genere, existența nu poate fi separată, în matematică cel puțin, de adevăr. Adevărul obiectiv al teoremelor matematice nu rezidă pentru Frege în faptul că ele sînt recunoscute ca adevărate de toată lumea, universalul consens rămîne un derivat al adevărului obiectiv și astfel obiectele matematice sînt independente de gîndire și reprezentare (vezi § 62, începutul), deși realitatea lor este fantomatică. Dimpotrivă, ar trebui să frapeze în afirmațiile lui Frege atît distanțarea față de poziția platonică potrivit cu care numerele *au* realitate, cît mai ales față de Kant: obiectele pot fi date gîndirii, fără a fi date în reprezentare ori intuiție, spațiul și timpul nu sînt cadrul aprioric în care avem experiența posibilă a numărului. Noțiunea fregeană de obiect este radical distinctă de noțiunea kantiană (vezi § 89). Să recunoaștem totuși că problema existenței și adevărului în matematică ridică dificultăți considerabile, bănuite deja de Frege, dar amplificate considerabil în matematicile acestui secol. Toate aceste dificultăți provin într-un fel sau altul din inseparabilitatea epistemologiei entităților matematice de ontologia lor.

[157] *Anzahl:* număr cardinal.

[158] Aici stă în ultimă instanță originalitatea întreagă a demersului fregean în comparație cu toți precursorii și cu contempo-

ranii lui, Cantor și Dedekind. Nimeni nu s-a adresat pînă la el propoziției numerice pentru a abstrage prin analiză pur logică numărul cardinal.

[159] Propozițiile de recogniție la care se referă aici Frege sînt propoziții de identitate, adică propoziții de forma „a=b"; pentru orice semn „a" care desemnează un obiect, adică funcționează ca nume propriu, se cere să existe un criteriu spre a decide dacă „a=b" este adevărată sau nu. Criteriul nu trebuie să fie „operațional", el poate fi pur teoretic. Din explicațiile și exemplele furnizate aici și în secțiunile următoare (vezi în special precizarea ultimului alineat al § 63) rezultă că propozițiile de identitate care exprimă o recogniție nu sînt absolut arbitrare, ci trebuie să satisfacă și o condiție suplimentară, pe care Frege nu o formulează precis, — poate fiindcă prin natura ei comportă o imprecizie —, dar care ar putea fi descrisă eventual după cum urmează: „a=b" este o judecată de recogniție dacă *a* și *b* sînt obiecte de *același gen*. De exemplu, *a* și *b* trebuie să fie amîndouă numere naturale, sau amîndouă direcții ale unor drepte, sau amîndouă greutăți ale unor corpuri etc. Condiția de mai sus poate fi întărită astfel: „a=b" este o judecată de recogniție dacă „a" și „b" sînt nume proprii în cuprinsul cărora se semnifică *explicit* că entitățile desemnate sînt de același gen. O judecată de recogniție va avea atunci forma „N[F]=N[G]" (pentru numere naturale), „direcția dreptei *a*=direcția dreptei *b*" (pentru direcții), „greutatea corpului *a* este aceeași cu greutatea corpului *b*" (pentru mase) ș.a.m.d. Dar însuși conceptul de *număr (direcție, greutate* etc.) va fi subînțeles, urmînd a fi definit pe altă cale. Va putea fi el abstras direct din criteriul de identitate a judecăților de recogniție pentru numere? Răspunsul ni-l vor da secțiunile următoare.

[160] David Hume, *A Treatise* ..., 1. cap. III, § 1.

[161] O primă trimitere la opera marelui Georg Cantor; confruntarea cu Cantor (a nu se confunda cu Moritz Cantor, citat în § 21) va continua în subcapitolul dedicat Numerelor infinite (§§ 84—86). A se vedea și nota 53. — Frege crede că numerele nu pot fi abstrase plecînd de la mulțimi de lucruri oarecare, fără apel la concept, adică spunînd pur și simplu: cînd două mulțimi pot fi

puse în corespondență biunivocă, ele au același număr, iar apoi definind succesiv numerele. În ultimă instanță, dar numai în ultimă instanță, demersurile lui Cantor și Frege sînt similare, însă... *non una est si duo dicunt idem!* Analiza logică a mecanismului de abstragere l-a condus pe Frege în alte direcții decît pe Cantor. După cum reiese și din referințele aduse, ideea lui Hume, adică punerea în joc a corespondenței biunivoce, fusese redescoperită și era pe punctul de a deveni un bun cîștigat al comunității matematice.

[162] Vezi nota 159.

[163] Este vorba despre așa-numitele definiții prin abstracție, studiate pentru întîia oară de către Frege, ceea ce a dus la o îmbogățire considerabilă a teoriei conceptului și a teoriei definiției. Pentru acest procedeu Frege nu are vreo denumire specială; termenul de „definiție prin abstracție" provine de la Peano (1894), Russell preluîndu-l și difuzîndu-l. Cantor, Frege, Dedekind, Russell au utilizat în mod independent acest procedeu în scopul definirii numărului cardinal.

[164] Primul semn, adică semnul relației de paralelism, are un conținut nespecific, general, legat de ceea ce am putea numi (în terminologie mai curînd booleeană decît fregeană) proprietățile ei formale, care sînt tocmai proprietățile unei relații de echivalență; dar același semn mai are un „conținut specific", legat de natura relatelor sau de ceea ce într-o terminologie iarăși nefregeană (împrumutată din tradiția filosofică) se numește genul relatelor. În timp ce identitatea este o relație absolut generală, o relație de echivalență (adică: reflexivă, simetrică și tranzitivă) cum este aceea de paralelism mai are și un conținut specific. Dacă *a* și *b* sînt identice, atunci ele stau și in orice relație de echivalență definită pe un domeniu de obiecte căruia îi aparțin *a* și *b*, dar reciproca nu este valabilă: dreptele paralele, de exemplu, nu sînt identice (adică indiscernabile) dar au ceva identic — direcția.

[165] În *Begriffsschrift*, Frege explicase deja posibilitatea obținerii unor concepte prin analiză logică a propozițiilor. Unul și același enunț poate fi analizat și descompus în mai multe feluri. Rămînînd deocamdată la ceea ce s-ar numi judecăți singulare și

judecăți de relație: putem izola în mai multe moduri subiectul real și predicatul real al enunțării. În exemplul adus de Frege mai sus, judecata „dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*" poate fi înțeleasă ca o judecată care enunță o relație despre *a* și *b*; acesta ar fi, probabil, „modul inițial" al scindării, la care face aluzie Frege — inițial, întrucît el ni se impune *prima facie*. Aceeași judecată poate fi înțeleasă și ca afirmînd că *a* are *proprietatea* de a fi paralelă cu dreapta *b*, sau că *a* cade sub conceptul desemnat de „paralel cu b". Totuși, cînd Frege vorbește despre obținerea unui „nou concept", el se referă, după toate probabilitățile, la o transformare de un gen mai radical. „Paralel cu *b*" înseamnă „avînd aceeași direcție ca *b*", de unde ajungem la „dreptele *a* și *b* au aceeași direcție", adică „direcția lui *a* este identică cu direcția dreptei *b*". Mecanismul logic care permite aceste transformări va fi dezvăluit de Frege mai jos, la capătul unei analize minuțioase, care acoperă §§ 65—68.

[166] Deși (1) *a* și *b* sînt paralele între ele dacă și numai dacă (2) direcția lui *a* este identică cu direcția lui *b* — avem deci o echivalență logică — relația din (1) este din punct de vedere epistemic primară față de identitatea din (2). Frege argumentează, într-adevăr, că relația de paralelism ar fi mai intuitivă decît relația de identitate a direcțiilor. Acest argument epistemologic se poate generaliza dincolo de domeniul geometriei, observînd că echivalența sub un raport dat a două obiecte de același gen este cunoscută de regulă înaintea relației dintre clasele de echivalență astfel determinate, clase care sînt obiecte abstracte, entități la un nivel superior. De aici și caracterul așa-zicînd mai intuitiv al primei relații. În limbajul teoriei mulțimilor: o relație de echivalență R definită pe un domeniu nevid determină o partiție a domeniului în clase de echivalență conținînd, fiecare, toate elementele echivalente *modulo* R, clase nevide, două cîte două disjuncte și acoperind prin reuniunea lor domeniul; invers, fiind dată partiția unui domeniu, există o relație de echivalență răspunzătoare de această partiție. Din punct de vedere gnoseologic, compararea obiectelor și echivalarea lor sub un criteriu dat constituie temeiul clasificării lor, deci este primară; în mod secund, dată fiind o anume clasificare, putem găsi întotdeauna o relație care o generează. Constatarea că două lucruri au aceeași cu-

loare premerge abstracției culorii; compararea lucrurilor sub raportul greutății premerge abstracției greutății. Schimbul de mărfuri *in actu* este condiție a abstracției valorii și — operațional — posesorii de mărfuri știu prea bine ce înseamnă că două mărfuri distincte au aceeași valoare, deși fetișismul mărfii îi împiedică să ajungă la abstracția valorii. Prioritatea gnoseologică are dealtfel și un pandant pur logic: pe baza unei relații de echivalență partiționarea este univocă, însă dîndu-se o partiție (mulțime-cît) putem ajunge la relații de echivalență intensional-distincte, deși avînd aceeași extensiune. Așa se explică, dealtfel, că Dedekind, Peano și Frege au putut ajunge la definiții deosebite, dar echivalente, ale numerelor cardinale: ei porneau de la relații de echivalență distincte însă echivalente între ele. Expunerea acestor considerații în stil matematic ar fi de bună seamă mai elegantă, totuși aici nu putem decît să trimitem la cursul de logică matematică și teoria mulțimilor.

[167] Definiția permite să înlocuim contexte de un tip determinat prin contexte de alt tip; ea nu determină „direcția unei drepte", ci „identitatea direcțiilor", adică sensul unei propoziții de recogniție. De remarcat că în formularea de mai sus *definiens*-ul este pus înaintea *definiendum*-ului, ceea ce, fără să încalce vreo regulă logică, se abate de la uzanțe.

[168] Doctrina logicistă presupune în mod esențial că identitatea este o relație logică și nu un concept matematic care vine să se adauge logicii; în timp ce un savant de talia lui Tarski, de exemplu, nu este singurul care consideră că divizarea termenilor în logici și extralogici este mai mult sau mai puțin arbitrară, logicistul se vede condamnat să includă semnul identității în rîndul constantelor logice, spre a fi în măsură să opereze reducția aritmeticii la logică. Legile identității vor fi deci pentru Frege legi logice eminamente analitice, *a priori*, iar semnul identității, '=' unul din simbolurile primitive ale sistemului formal construit în *Grundgesetze der Arithmetik*. Frege introduce, dealtfel, semnul identității încă în *Begriffsschrift*, dar acolo semnul are numai funcția de a exprima identitatea sensului unei expresii introduse prima oară cu sensul unei expresii date în prealabil.

169 Acesta este faimosul *principium identitatis indiscernabilium*, pe care Frege și-l însușește ca definiție a identității obiectelor: „Sînt aceiași acei [termeni] care pot fi substituiți unul în locul celuilalt păstrînd adevărul [unui enunț oarecare]". Pasajul din Leibniz continuă astfel: „Dacă avem A și B iar A intră într-o propoziție adevărată și substituția lui B pentru A oriunde acesta din urmă apare dă loc la o nouă propoziție care este de asemenea adevărată, și dacă aceasta se poate face pentru orice asemenea judecată, atunci A și B se spun a fi *aceiași;* reciproc, dacă A și B sînt aceiași, ei pot fi substituiți unul în locul celuilalt, așa cum am spus". Exegeții moderni remarcă inacuratețea semantică a formulării, întrucît A și B sînt înțeleși cînd ca termeni, cînd ca obiectele referite prin intermediul termenilor; Frege, atît de scrupulos în alte contexte, omite prilejul de a denunța aici confuzia între *semn* și *semnificat*, respectiv între menționarea și utilizarea expresiilor. Să fie acesta efectul admirației sale necondiționate față de Leibniz? Fapt este că dacă principiul vizează identitatea obiectelor, formularea leibniziană se referă la expresii desemnînd obiecte: în propoziții substituim *numele* obiectelor, nu obiectele însele. Dar în perioada *Fundamentelor aritmeticii* Frege nu clarificase pe deplin răspunsul la întrebarea cu care debutează „Despre sens și semnificație": ce este identitatea? O relație între obiecte, sau între semne? Principiul identității indiscernabilelor, desemnat uneori și ca „legea lui Leibniz", se poate lămuri deci în două feluri, înlăturînd confuzia *use-mention:* 1) fie ca principiu conform căruia desemnările obiectelor identice sînt reciproc substituibile în orice context; sub această formă, principiul reglementează și așa-numita relație de denumire — *the name-relation* (vezi Rudolf Carnap, *Semnificație și necesitate*, p. 148); 2) fie ca principiu conform căruia $x=y$ dacă și numai dacă orice proprietate a unuia este proprietate a celuilalt. În prima sa formulare, principiul este (ori pare) contrazis în cazul contextelor neextensionale, înăuntrul cărora substituirea termenilor avînd aceeași semnificație însă sensuri diferite nu întotdeauna păstrează adevărul propoziției. Frege s-a străduit să salveze principiul, prin distincția între semnificații directe și indirecte.

170 Am tradus „Gleichheit", „gleich" cînd prin „egalitate", „egal", cînd prin „identitate", „identic". În mai multe ocazii Frege

a subliniat că egalitatea înseamnă întotdeauna tocmai identitate. Observaţiile făcute de autorul *Fundamentelor aritmeticii* în alineatul pe care tocmai îl comentăm erau mai puţin oţioase în epoca respectivă: Frege era contemporan şi cu matematicieni care, „mai în glumă mai în serios" nu găseau nepotrivit să afirme că 1+1 este egal cu 2 însă nu identic! Dacă această confuzie între sensul şi semnificaţia lui „1+1" şi „2", respectiv între semn şi semnificaţie, este astăzi eradicată, meritul revine lui Frege în primul rînd.

[171] Autorul nu justifică totuşi nicăieri această afirmaţie printr-o deducţie formală. Dealtfel, el nici nu formalizează principiul lui Leibniz. — Privitor la modalitatea introducerii acestui principiu în *Fundamentele aritmeticii*, I. Angelelli ridică următoarele obiecţii dure: „(1) Este *dogmatică* — «Leibniz dixit». Trebuie reamintit că într-un sens Leibniz era modelul lui Frege, aşa cum se afirmă în Cuvîntul înainte la *Begriffsschrift.* (2) Este *incoerentă:* Frege propune o analiză a conceptului identităţii dar aceasta se reduce la adoptarea principiului lui Leibniz. (3) Este *falsă în ceea ce îl priveşte pe Leibniz.* Leibniz restrîngea *în mod sistematic* formula sa „eadem sunt . . .". „El nu privea formula sa ca pe o lege universală plauzibilă, ale cărei excepţii sînt enigme surprinzătoare descoperite cu surle şi trîmbiţe (aşa cum s-a întîmplat în filosofia post-fregeană). Pe de altă parte, nu este limpede motivul pentru care Frege adoptă tocmai această formulare foarte tare a principiului lui Leibniz. (4) Este, de bună seamă, *incompatibilă cu propria semantică a lui Frege*" (I. Angelelli, *op. cit.*, pp. 51—52).

[172] Precizare importantă asupra principalului criteriu prin care deosebim obiectele de concepte: conceptul este predicat virtual, obiectul poate fi subiect al unui „conţinut judicabil singular", sau, încă, o parte a predicatului acestuia din urmă. Caracterizarea conceptului ca predicat posibil este de obîrşie kantiană. Distincţia concept-obiect va fi adîncită în „Funcţie şi obiect", „Despre concept şi obiect". Autorul trece aici cu dezinvoltură de la expresii la semnificaţii; căci dacă articolul hotărît se aplică numelor proprii, însuşirea pe care o are direcţia axei Pămîntului de a fi subiect real al unui conţinut judicabil singular este diferită de

însuşirea derivată de a fi subiect gramatical al propoziţiei în care se exprimă acest conţinut judicabil şi diferită de însuşirea de a fi o parte a predicatului „identic cu direcţia axei Pămîntului". Să fim deci atenţi: 1) prin „conţinut judicabil singular" Frege nu înţelege propoziţia singulară, ci gîndul obiectiv exprimat într-o propoziţie singulară; 2) prin „subiect", are în vedere subiectul real, referinţa unui nume propriu; 3) prin „predicat", are în vedere cînd expresia cu funcţie de predicat, cînd conceptul desemnat de predicatul propoziţiei singulare. În pofida acestor corective, pasajul în ansamblul său este limpede şi adînc.

[173] Consideraţiile dezvoltate pînă aici pot fi privite şi ca obiecţii anticipate împotriva operaţionalismului, care vrea ca obiectele abstracte (îndeosebi cele din ştiinţele fizice) şi conceptele teoretice să prindă fiinţă pe baza unor operaţii de măsură. Operaţionalismul nu este exact un mod particular al creaţionismului definiţional formalist criticat de Frege, dar are comun cu acesta încrederea în puterile genetice ale definiţiilor.

[174] S-ar putea crede că Frege amalgamează aici două genuri de definiţii: acelea pur abreviative, a căror menire este să condenseze expresii mai lungi în expresii concise — nu altul este cazul definiţiilor din sistemele formale — şi definiţiile cu adevărat lămuritoare, care pe lîngă că „stipulează semnificaţia unui semn", ca primele, mai spun şi ceva despre această semnificaţie. Transformarea definiţiei într-o judecată în rînd cu altele înseamnă că definiţiile de al doilea gen informează nu numai asupra (semnificaţiei) SEMNULUI dar şi asupra SEMNIFICAŢIEI (semnului). Definiţiile pe care Frege le va da numerelor naturale 0, 1, 2,... nu stipulează numai înţelesul unor semne, ci aduc informaţii noi, căci ele asociază unei semnificaţii cunoscute un sens încă necunoscut.

[175] Lectura întregii secţiuni trebuie racordată la distincţia sens-semnificaţie, pe care *în fapt* Frege o deţine deja, fără s-o numească şi s-o dezvolte. În articolul său din 1892, Frege va spune că sensul unei expresii este modul în care este dată semnificaţia acesteia; analiza va porni atunci tot de la identităţi şi propoziţii identice. Definiţia unui nume propriu este o propoziţie de identitate; definiţia este informativă în aceeaşi măsură ca orice ju-

decată — nu este o tautologie goală, o identitate de genul „a=a" — întrucît *definiens*-ul, prin sensul său, dă într-un mod diferit semnificația *definiendum*-ului.

[176] Identitatea extensiunilor conceptelor menționate rezultă din faptul că relația de paralelism între dreptele *a* și *b* este o relație de echivalență.

[177] Relația de echinumericitate *(Gleichzahligkeit)* între concepte va fi analizată și definită pur logic în § 72. În construcția numărului cardinal, Cantor pornește de la o comparație analoagă între mulțimi, introducînd o relație pe care o numește „echivalență". Bolzano dispunea deja de o asemenea relație, pusă în joc, dealtfel, încă de către Galilei atunci cînd acesta stabilea aparent paradoxala corespondență biunivocă între mulțimea numerelor naturale 1, 2, 3, 4... și mulțimea numerelor pare 2, 4, 6, 8...

[178] Încă nu am obținut definiția conceptului de „număr", dar aceasta rezultă imediat (vezi finele § 72) din definiția pentru „numărul care revine unui concept". De pe acum se întrevede ce este numărul cardinal: sfera unui concept definit pe baza relației de echinumericitate, concept înăuntrul căruia cad toate conceptele puse două cîte două în corespondență biunivocă după sfera lor.

[179] Prin „echinumeric cu conceptul F" este desemnat un concept de ordinul doi, și anume proprietatea comună tuturor conceptelor față de care F stă în relația de corespondență biunivocă; or această proprietate este (sau poate fi) tocmai aceea de a avea „un număr de elemente". Frege explică de ce nu ia însuși conceptul de ordin doi ca număr, ci ia mulțimea (de concepte) determinată prin acela din urmă. Primul punct al explicației sale nu necesită explicații suplimentare. Al doilea punct („conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă") face aluzie, probabil, la faptul că dacă N[F] (numărul care revine lui F) este *conceptul* „echinumeric cu F", atunci dacă G este echinumeric cu F, ar urma că N[G] este *conceptul* „echinumeric cu G" și astfel, deși ar trebui să avem N[F]=N[G], *qua* concepte cele două numere ar fi distincte. Dacă însă luăm sferele conceptelor „echinumeric cu F", „echinumeric

cu G" în calitate de N[F] şi N[G] atunci numerele coincid întrucît conceptele au aceeaşi sferă. — Ar fi interesant de ştiut ce vroia să spună Frege cînd pretinde „că ambele obiecţii pot fi înlăturate". Dar aici se pot face doar simple conjecturi. În practică, Frege lucrează cu sfere de concepte. În legătură cu preîntîmpinarea primei obiecţii, s-ar putea remarca — alături de Benno Kerry, a cărui observaţie va fi acceptată în substanţă de Frege, dar peste mai mulţi ani — că atunci cînd vorbim despre *Conceptul* X (aici: *Conceptul* „echinumeric cu F") vorbim deja despre un obiect, nu mai puţin ca atunci cînd am vorbi despre extensiunea unui concept; a se vedea „Despre concept şi obiect" în volumul de faţă. În legătură cu a doua obiecţie, este pertinentă observaţia făcută de Frege în alte lucrări printre care şi *Recenzia* la *Filosofia aritmeticii* a lui Husserl: Frege spune că deşi relaţia de identitate este propriu-zis o relaţie definită numai pentru obiecte, conceptele avînd aceeaşi sferă se află într-o relaţie ***similară***. Cu bunăvoinţă, afirmaţia s-ar putea interpreta ca permisiune de identificare absolută a conceptelor avînd aceeaşi sferă.

180 Analiza logică oferă antidotul acelui „element intuitiv" care se cere eliminat din fundaţiile aritmeticii. Epistemologia fregeană a aritmeticii — în această etapă — este opusă celei kantiene prin circumspecţia arătată faţă de intuiţie.

181 Frege rezumă explicaţia dată în *Begriffsschrift;* importanţa ei nu poate scăpa nimănui, în măsura în care se înţelege că logica predicatelor permite formalizarea relaţiilor, rezolvînd astfel cu succes problema cea mai dificilă în faţa căreia nu numai logica tradiţională dar şi algebra logică booleană eşuaseră. Aici, Frege lămureşte cum degajăm dintr-un „conţinut judicabil" elementele sale componente: concepte simple, concepte de relaţii. Analiza logică prin care ajungem la ele are caracterul unei descompletări, al ruperii unui întreg organic în părţi recompozabile într-un conţinut judicabil complet. Noutatea revoluţionară a procedeului de formalizare impus de logica predicatelor nu este în nici un chip afişată, am spune mai degrabă că e camuflată. Frege are aerul de a recita o Sagă veche de cînd lumea şi nu de a sparge tiparele tradiţiei.

182 Ni se spune explicit că logica pură este nu numai a conceptelor simple, ci și a celor relaționale. Logica studiază nu conținuturi particulare, ci forme; adevărurile logice sînt analitice și deci *a priori*.

183 Această „formă generală" o vom simboliza prin „φab"; prin „Fa" va fi notat „a cade sub conceptul F" sau „a este F".

184 Așadar, relația binară φ include în domeniul ei sfera lui F iar în codomeniul ei sfera lui G dacă avem:
$(a)(Fa \rightarrow \exists b(Gb \& \varphi ab) \& (a)(Ga \rightarrow \exists b(Fb \& \varphi ba))$. Aici, a și b sînt utilizate in calitate de variabile individuale.

185 În simboluri: $(a)(Fa \rightarrow (\exists b)(Gb \& \varphi ab))$.

186 $(a) \sim (Fa \& (b)(Gb \rightarrow \sim \varphi ab))$. Formula este logic-echivalentă cu aceea de la nota precedentă.

187 $\sim \exists aFa \rightarrow (a)(Fa \rightarrow (\exists b)(Gb \& \varphi ab))$. Spre deosebire de formulele de la notele 185 și 186, aceasta este logic-adevărată, exprimă o lege logică. Validitatea formulei se întrevede cu ușurință; intr-adevăr, presupunînd că antecedentul ei, adică $\sim \exists aFa$, are loc, atunci Fa nu are niciodată loc, iar atunci și consecventul formulei de la 187 (deci formula de la 185) are loc, ca implicație al cărei antecedent este întodeauna fals.

188 $(b)(Gb \rightarrow \exists a(Fa \& \varphi ab))$. Formula este adevărată pentru orice G astfel încît $\sim \exists bGb$.

189 $(a) \sim (Ga \& (b)(Fb \rightarrow \sim \varphi ba))$.

190 $(d)(a)(e)((\varphi da \& \varphi de) \rightarrow a = e)$. Relațiile care prezintă proprietatea formală enunțată se spun a fi *multiunivoce* (*many-one*).

191 $(d)(b)(a)((\varphi da \& \varphi ba) \rightarrow d = b)$. Spunem că este o relație *unimultivocă* (*one-many*). O relație care satisface ambele condiții se numește biunivocă (*one-one*). O relație biunivocă ce pune în corespondență obiectele subsumate unor concepte realizează o corespondență biunivocă între aceste obiecte.

192 Vom nota prin „Ech(F, G)" expresia „F și G sînt echinumerice"; așadar Ech(F, G) este o relație de ordinul doi (sau, cum spune Frege în altă parte, de treapta a doua), relație ale cărei argumente sînt concepte. Vom nota prin $Un_1(\varphi)$ faptul că o relație satisface condiția de multiunivocitate (vezi nota 190) și prin $Un_2(\varphi)$ faptul că o relație satisface condiția de unimultivocitate (nota 191). Mai departe, să prescurtăm prin „$Cor_1(\varphi, F, G)$" faptul că relația φ corelează obiectele subsumate conceptelor F și G, adică satisface condițiile de la 185 și 188. Definiția lui Frege capătă atunci următoarea formă concisă:

$$Ech(F, G) =_{df} \exists \varphi(Cor_1(\varphi, F, G) \& Un_1(\varphi) \& Un_2(\varphi)).$$

Deși formula aparține logicii predicatelor de ordin superior, ca definind o relație între entități aflate la un nivel superior indivizilor, *definiens*-ul nu este decît abrevierea unei formule din logica predicatelor de ordinul 1.

[193] Vezi § 69; pentru a formaliza definiția avem nevoie de o notație pentru clase (= sfere, extensiuni de concepte). Frege notează extensiunea conceptului cu ajutorul unui operator similar operatorului lambda din logica de astăzi (vezi „Funcție și concept", în acest volum p. 252); extensiunile conceptelor F, G se pot nota deci prin $\acute{\alpha}F(\alpha)$, $\acute{\eta}G(\eta)$. Cu ajutorul λ-notației, extensiunile le vom nota prin λxFx, λyGy, etc. (x, y sînt utilizate ca variabile individuale legate prin operatorul λ). Conceptul „echinumeric cu conceptul F" este *abstras* din relația Ech(H, F) prin intermediul procedeului descris de Frege în § 70: Vom considera F ca fixat și H ca variabil, adică pe acesta din urmă îl vom privi ca pe un ocupant provizoriu al locului deținut într-un „conținut judicabil" de forma „Ech(H, F)"; așadar, „Ech (~, F)" va fi o notație potrivită pentru acest concept, „~" marcînd locul liber, prin a cărui completare („umplere") cu concepte de ordinul I se obțin propoziții adevărate sau false. Definiția lui Frege se prezintă acum sub forma:

$$N[F] =_{df} \lambda H(Ech(H, F)).$$

În cadrul acestei formule F poate fi privit ca variabilă liberă luînd ca valori concepte, iar H este o variabilă de același gen, legată prin aplicarea λ-operatorului la formula Ech(H, F). În locul lui H putem alege orice altă variabilă definită pe același domeniu, de ex. G, L, ... etc.

[194] Notînd prin $\mathfrak{N}(n)$ expresia „n este un număr", vom avea:

$$\mathfrak{N}(n) =_{df} (\exists F)(N[F]) = n).$$

[195] Se va demonstra, prin urmare, validitatea formulei:

$$Ech(F, G) \rightarrow N[F] = N[G].$$

[196] $Ech\ (F, G) \rightarrow (\lambda H.Ech(H, F) = \lambda H.Ech(H, G)).$

[197] După ce formula de la nota 195 a fost echivalată, conform definiției pentru „numărul care revine unui concept", cu formula de la 196, aceasta din urmă se dovedește echivalentă cu:

$$Ech(F, G) \rightarrow (H)\ [(Ech(H, F) \rightarrow Ech(H, G))\&(Ech(H, G) \rightarrow \rightarrow Ech(H, F))].$$

Această formulă afirmă tocmai că în ipoteza Ech(F, G) orice concept echinumeric cu F este un concept echinumeric cu G și reciproc; altfel spus, în ipoteza amintită, sferele conceptelor „echinumeric cu F", „echinumeric cu G" sînt identice:

$$\lambda H.\ Ech(H, F) = \lambda H.Ech(H, G).$$

[198] În nota 192 s-a introdus definiția $\exists\varphi(Cor_1(\varphi, F, G)\&Un_1(\varphi)\ \&\ Un_2(\varphi))$ pentru Ech(F, G); această definiție o vom abrevia, introducînd $Cor_{1-1}(\varphi, F, G) =_{df} Cor_1(\varphi, F, G)\&Un_1(\varphi)\&Un_2(\varphi)$. Cu alte cuvinte, am notat prin $Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$ „relația φ pune în corespondență biunivocă obiectele care cad sub F cu cele de sub G". Avem: $Ech\ (F, G) \leftrightarrow (\exists\varphi)Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$. Acum, Frege arată că „prima propoziție", *id est* Ech(F, G) →

$\rightarrow$ (Ech (H, F) $\rightarrow$ Ech(H,G) (presupunînd că H este un concept oarecare), este echivalentă cu afirmația:

$$[(\exists\varphi)Cor_{1-1}(\varphi, F, G) \& (\exists\psi)Cor\ (\psi, H, F)] \rightarrow (\exists\chi)Cor_{1-1}(\chi, H, G).$$

[199] Fiind date relațiile φ și ψ care satisfac condițiile de a corela biunivoc conceptele F, G respectiv H, F se cere să determinăm o relație χ care să coreleze biunivoc conceptele H, G. Frege arată că ceea ce numim astăzi *produsul* relațiilor φ și ψ satisface condiția cerută. Produsul necomutativ al celor două relații, notat prin ψ/φ, se definește: $(\psi/\varphi)(c, b) = {}_{df}(\exists a)(\psi ca \& \varphi ab)$, pentru orice c și b. Așadar, χ este aici ψ/φ. În teoria relațiilor (sau logica predicatelor) se demonstrează că produsul a două relații biunivoce este tot o relație biunivocă și că dacă mulțimea A este pusă în corespondență biunivocă cu B, iar la fel B cu C, atunci mulțimile A, C pot fi puse la rîndul lor în corespondență biunivocă.

[200] Este vorba de propozițiile: ((Ech(F, G)&Ech(H, G)) $\rightarrow$ Ech(H, F) și N[F] = N[G] $\rightarrow$ Ech(F, G).

[201] Întrucît formula (x = x) definește un concept, și anume unul sub care cade orice obiect, este într-adevăr o lege a identității că (x)(x = x); negația formulei x = x, pe care o notăm prin x $\neq$ x, definește un concept sub care nu cade nici un obiect, cu alte cuvinte avem ca lege a identității: $\sim(\exists x)(x \neq x)$. Aceasta justifică definiția: $0 = {}_{df}N[x \neq x]$.

[202] Observație fecundă, putînd da loc la diferite precizări și dezvoltări, în funcție de filosofia și aparatul logic cu care lucrăm. Pe baza logicii clasice, a logicii intuiționiste, a logicii modale și a diverselor teorii asupra descripțiilor și definițiilor, admiterea conceptelor sub care nu cade nici un obiect și (în particular) a conceptelor contradictorii găsește diferite explicații însă nici un contraargument decisiv. Frege pare a asimila aici conceptele sub care nu cade nimic cu conceptele care conțin o contradicție, aparență dezmințită de alte afirmații în sensul că demonstrația de necontradicție nu oferă *eo ipso* o demonstrație de existență.

[203] Avem aici o expunere concisă a teoriei descripțiilor definite în varianta sa fregeană. Termenul „descripție" este propus de Russell, însă prima analiză în logica modernă a descripțiilor a fost inițiată de Frege. Russell va trasa o linie despărțitoare între nume proprii și descripții — primele avînd referință, nu și sens, ultimele avînd în mod primar sens și ajungînd, ca „simboluri incomplete", să refere abia în contextul propozițiilor; Frege în schimb privește descripția individuală definită — „definiția unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează" — tot ca pe un nume propriu. Expresia care prezintă trăsăturile formale ale

unei descripții definite (de ex., admite articolul hotărît, respinge articolul nehotărît și cuprinde în sine expresii conceptuale) „are un conținut", *id est* un sens dacă și numai dacă conceptul prin care se introduce respectivul individ are proprietățile existenței și unicității. Limba obișnuită nu poate fi epurată de pseudodescripții — expresii pentru care nu se asigură existența și unicitatea semnificației —, însă Frege își pune problema de a asigura cel puțin sistemului formal al aritmeticii capacitatea de preîntîmpinare a pseudodescripțiilor (a se vedea pentru detalii *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I). Metodele de analiză semantică a expresiilor își găsesc expresie și motivare în diversitatea modalităților de înțelegere a descripțiilor definite. În consecință, asistăm acum la o adevărată explozie de teorii și metode care analizează descripțiile sub două aspecte: 1) semnificația și utilizarea descripțiilor în limbile naturale și în limbajele științifice neformalizate; 2) introducerea cît mai satisfăcătoare a descripțiilor în sistemele formale. Printre analizele și metodele cele mai influente se numără cele propuse de Russell, Hilbert și Bernays, Carnap, P. F. Strawson, Keith S. Donnellan, Kripke. Din vasta bibliografie dedicată descripțiilor definite propunem cititorului să aleagă, pentru început, cap. X, secțiunea 2 (Teoria descripțiilor și varietatea desemnărilor) din *Dezvoltarea logicii* de W. și M. Kneale (ed. rom. vol. II, pp. 228—230) și cap. I, §§ 7, 8 (Descripțiile individuale. Metoda lui Frege pentru descripții) din *Semnificație și necesitate* de Rudolf Carnap (pp. 77—85). În logica tradițională, problema descripțiilor a fost de asemenea analizată; în *Logica de la Port Royal*, găsim, de exemplu, o fină analiză a „termenilor singulari complecși", expresii prin care se înțelegeau tocmai ceea ce astăzi numim descripții (vezi Drăgan Stoianovici, „Definite Descriptions in Port-Royal Logic", în „Rev. Roum. Sci. Sociales", Philosophie et Logique, vol. 20, nr. 2, 1976, pp. 145—154).

[201] Astăzi obișnuim a spune (*apud* Church) că „*a* cade sub conceptul **F**" — adică „F(a)" — este o formă propozițională definind funcția propozițională însăși, *id est* conceptul **F**; forma conține o variabilă liberă și se transformă într-o propoziție adevărată sau falsă dacă în locul lui *a* substituim numele unui obiect. „Conținut judicabil" înseamnă pentru Frege „gînd" a cărui valoare de adevăr o putem recunoaște, asertîndu-l în cazul cînd îl recu-

noaştem ca adevărat, întrebîndu-ne dacă este adevărat, asertînd negaţia sa în cazul cînd este recunoscut ca fals.

205 $(x \neq x)(a)$ înseamnă acelaşi lucru ca „$a \neq a$“.

206 Pasajul suscită cîteva comentarii. 1) Întrucît în locul unui concept pur logic ca acela al non-identităţii putem lua orice concept de sferă vidă se creează impresia că definiţia logicistă a lui zero şi a şirului numerelor naturale conţine un element arbitrar: putem avea o definiţie a lui zero în termeni logici, dar de vreme ce mai putem avea alta prin intermediul unor concepte factuale, nu rezultă că natura analitică a matematicii este o posibilitate, nu o necesitate stringentă? Nu cumva însăşi distincţia analitic-sintetic îşi dovedeşte astfel precaritatea? În literatura filosofică, posibilitatea unor definiţii alternative (e drept, nu în termeni factuali, ci în termenii teoriei mulţimilor) a stîrnit deja oarecare impacienţă. Indubitabil, Frege întrevăzuse caracterul întrucîtva arbitrar al definiţiei numărului, fără să se arate alarmat de împrejurarea că orice definiţie conţine un element arbitrar; uneia şi aceleiaşi semnificaţii i se pot asocia sensuri diverse, dintre care definiţia are latitudinea să aleagă. Dar tulburătoare în cazul de faţă este nu posibilitatea unor definiţii alternative ale numărului, ci posibilitatea unor definiţii „factuale“, în contrast cu definiţiile pur logice. Obiecţia poate fi însă parată, observînd că distincţia între concepte „logice“ şi „factuale“ nu este atît de solidă în cazul conceptelor de sferă vidă; „munte de aur“, concept de sferă vidă, nu este un concept *logic*, dar s-ar părea că aceasta nu ne îndrituieşte să-l numim *factual*. 2) Asupra „definiţiei“ identităţii la Leibniz, a se vedea nota 171; aici să adugăm că o formalizare posibilă a principiului substitutivităţii identicilor rezidă în axiomele identităţii, care sînt enunţuri de forma

$$(x)(y)(z)\ (x \quad y \rightarrow (Fx \rightarrow Fy))\ ;$$

Quine a emis teza că orice interpretare a cuantorilor presupune substitutivitatea identicilor. Teza lui Quine rămîne în continuare controversată; în jurul interpretărilor cuantorilor a avut loc de asemenea în ultimul deceniu o discuţie al cărei sfîrşit nu se întrevede în viitorul apropiat, întrucît afirmaţii în aparenţă incompatibile pot fi susţinute prin construirea unor sisteme logice în egală măsură coerente

[207] $(F)(G)\ ((\sim \exists aFa\ \&\ \sim \exists aGa) \rightarrow Ech\ (F,\ G))$; formula exprimă prima parte a aserțiunii adnotate.

[208] $(F)(\sim \exists aFa \leftrightarrow N[F] = 0)$.

[209] Avem: $(\sim \exists\ aFa\ \& \sim \exists aGa) \rightarrow (\exists\varphi)(Cor_{1-1}\ (\varphi,\ F,\ G)$. Vezi și notele 187, 188.

[210] Prescurtăm prin „S(n, m)" expresia „*n* succede imediat lui *m* în șirul numerelor naturale". Avem următoarea definiție:

$$S(n,\ m) =_{df} (\exists F)(\exists x)(\exists G)(Fx\ \&\ N[F] = n\ \&\ (y)(Gy \leftrightarrow (Fy\ \&\ x \neq y))\ \&\ N[G] = m).$$

Membrul drept al definiției este o formulă în care singurele variabile libere sînt *n* și *m*; expresia definește, așadar, o relație diadică, în speță S (n, m).

[211] Se va demonstra formula $(\exists x)S(x,\ 0)$.

[212] Particularizăm F și G din definiția de la nota precedentă prin „$x = 0$" și respectiv „$(x = 0\ \&\ x \neq 0)$", iar pe *m* prin 0. Se observă că utilizăm în mod esențial pentru G un concept de sferă vidă, introdus printr-o expresie evident contradictorie. Avem: $N[G] = N[x = 0\ \&\ x \neq 0]$ 0 *m* este particularizat prin 0. Avem, de asemenea, $S(n,\ 0)$. Pentru conceptul de a fi identic cu 0 sînt evidente atît existența cît și unicitatea obiectului care cade sub el. Acest obiect este numărul 0. Numărul conceptului sub care cade numărul zero și numai zero este 1. Definiția: $1 =_{df} N[x = 0]$ revine la a-l defini pe 1 ca succesor imediat și unic al lui 0.

[213] Frege identifică în acest context „faptul observat" cu „propoziția non-generală", adică existențială. Afirmația că nici un element subiectiv nu intră în definiția numărului rămîne desigur valabilă.

[214] Pasajul evidențiază pentru elementul obiectivist al concepției fregeene: condițiile cunoașterii nu sînt dătătoare de seamă pentru conținutul ei și, în orice caz, nu pot fi puse în vreo conexiune cu adevărul propoziției. Gîndirea nu creează prin activitatea sa adevărul.

[215] $S(a,\ 0) \rightarrow a = 1$.

[216] $(F)(N[F] = 1 \rightarrow \exists xFx)$.

[217] $(F)(x)(y)((N[F] = 1\ \&\ Fx\ \&\ Fy) \rightarrow x = y)$.

[218] $(F)(x)(y)\ ((Fx\&Fy \rightarrow x = y) \rightarrow (\exists zFz \rightarrow N[F] = 1))$.

[219] $Un_{1-1}(S)$Vezi notele 190–192.

[220] $(x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)S(x,\ y))$.

[221] Se cere să se demonstreze $(n)(N(n) \rightarrow \exists m S(m, n))$.

[222] În *Begriffsschrift*, Frege a introdus noţiunea de *proprietate ereditară în cadrul unui şir*; este ceea ce în logica simbolică de astăzi numim proprietate ereditară în raport cu o relaţie dată. Spunem că *proprietatea F este ereditară în raport cu relaţia* φ — şi vom scrie „Her(F, φ)" — dacă proprietatea în cauză este transmisibilă de la oricare membru întîi al relaţiei la membrul doi corespunzător. În simboluri: $Her(F, \varphi) =_{df} (x)(y)((Fx \& \varphi xy) \rightarrow Fy)$. Frege vorbeşte despre „şiruri" (Reihen) generate prin „operaţii" (Verfahren) şi nu „relaţii", însă definiţia proprietăţilor ereditare rămîne în esenţă aceea de mai sus. Mai departe, Frege defineşte în *Begriffsschrift* relaţia de succesiune în cadrul unui φ — şir. Notînd prin $S\varphi(y, x)$ „y succede în şirul φ lui x", definiţia dată de Frege revine la:

$$S\varphi(y, x) =_{df} (a)(F)(\varphi(x, a) \rightarrow Fa) \& Her(F, \varphi)) \rightarrow Fy).$$

Definiţia spune că y este succesor al lui x în şirul generat de relaţia φ dacă y se bucură de orice proprietate ereditară relativ la φ de care se bucură şi orice rezultat al aplicării relaţiei (operaţiei) φ la x. În terminologia russelliană, numim această relaţie $S\varphi$ *ancestral* al relaţiei φ. Astfel, ancestralul relaţiei de la tată la fiu este relaţia (de descendenţă) de la strămoş la urmaş: x este strămoş al lui y dacă *orice* proprietate ereditară (evîdent nu numai biologică, ci şi logică) transmisă de *x* fiilor săi este o proprietate a lui y. Întrucît printre aceste proprietăţi ereditare se numără şi proprietatea de a *descinde din x*, valabilitatea afirmaţiei este evidentă. Aşadar, pentru orice relaţie φ, $S\varphi(y, x)$ are loc dacă şi numai dacă aplicarea iterată de un număr oarecare de ori a relaţiei φ, pornindu-se de la x, duce la y.

[223] Relaţia φ determină o anumită ordonare a argumentelor pentru care relaţia are loc; proprietăţile formale ale ordinii respective variază în funcţie de natura relaţiei, care poate fi multiunivocă (many-one), unimultivocă (one-many) ş.a.m.d.

[224] Poziţie materialistă; interpretarea pasajului nu comportă nici o ambiguitate. În chip vădit, materialismul istorico-naturalist al epocii nu rămîne fără ecou în gîndirea lui Frege.

[225] Ar fi interesantă aici comparaţia intre Frege şi intuiţionişti. Frege formulează în termeni de rezonanţă intuiţionistă („atenţie", „criteriu de decizie a unei probleme") întrebări cărora le dă răspunsul „logicii clasice". Este o solidaritate de esenţă între principiile logicii clasice, succint rezumate aici (cu acceptarea implicită a legii terţiului exclus ca lege universală, ce nu admite excepţii) şi poziţia aşa-zicînd platonică: adevărul etern, obiectiv, transtemporal, negrevat de presupoziţii epistemologice, al legilor logicii şi matematicii. În ultimul timp s-a vorbit mult

despre caracterul preponderent epistemologic şi nu ontologic al filosofiei fregeene, însă unui exces riscă să i se răspundă prin altul de semn opus dacă trecem uşor peste postulatul evident acceptat de către logicianul de la Jena, şi anume că nici un considerent de ordin epistemic — deci implicînd o referire la subiectul cognitiv — nu interferează cu conţinutul obiectiv adevărat al propoziţiilor logico-matematice.

[226] Relaţia S (n, m) este tranzitivă.

[227] Cititorul întrevede cu uşurinţă forma de raţionare la care se face aluzie: inducţia matematică, cunoscută sub numele de inducţie bernoullică (vezi *Begriffsschrift*, nota lui Frege). Jacob Bernoulli (1654—1705) era într-adevăr considerat pionierul acestei metode folosită în matematici pentru prima dată de către Pascal

[228] Notam prin Seq_n (m) forma propoziţională „m este un membru al şirului de numere naturale 0, 1, ... *n*"; pentru n=1, 2, ... obţinem de fiecare dată un alt concept. Fie un ***n*** determinat; Frege îşi propune că arate că există un *m* astfel încît acesta este cel mai mic număr care este succesor al lui n, şi anume $m=N[Seq_n]$.

[229] Se are în vedere aici inducţia incompletă, în opoziţie cu aceea matematică, numită şi „completă"; ultima conduce la propoziţii universale şi certe, cum este tocmai propoziţia a cărei demonstraţie (inductivă) va fi schiţată.

[230] Notînd prin „S (n, m)" forma propoziţională „*n* succede imediat lui *m* în şirul numerelor naturale" (a se vedea nota 210) constatăm că relaţia de succesiune în şirul numerelor naturale este ancestralul relaţiei S, adică este S_φ (vezi nota 222). Se caută demonstraţia formulei: $S(N[Seq_n],n)$. Pentru aceasta — arată Frege — se va demonstra în primul rînd că dacă S (a, d) şi $S(N[Seq_d],d)$, atunci $S(N[Seq_a],a)$. În al doilea rînd, trebuie demonstrat că $S(N[Seq_0],o)$.

[231] Procedeul demonstrativ utilizat de către Frege este, evident, inducţia matematică. Principiul inducţiei matematice se exprimă în logica predicatelor de ordinul 1 prin schema: $(n)(F(O)\,\&\,F(n)\rightarrow F(n+1))\rightarrow(n)F(n)$. În cadrul axiomatizării Peano a aritmeticii,

schema inducţiei matematice îmbrăţişează o infinitate de axiome, obţinute prin substituţii de constante predicative în F. Considerată ca schemă de formule a logicii de ordinul 1, nu poate fi vorba de o validitate logică a principiului pe care această formulă îl exprimă. Analizată în continuare prin intermediul definiţiilor amorsate de Frege, schema conduce la un principiu logic-valid, dar acesta este un principiu valid al logicii predicatelor de ordin superior. Principiul afirmă că o proprietate a lui 0 ereditară relativ la relaţia S este universală.

232 Se cere demonstraţia unei aserţiuni a cărei simbolizare nu decurge la fel de simplu ca mai sus. Anterior, de exemplu, spre a desemna conceptul „membru al şirului de numere naturale terminat cu *a*", am introdus notaţia „Seq_a", simplificînd printr-un tacit abuz de limbaj o notaţie de genul lui „$Seq_a($ $)$", în care *locul* argumentului ţine de notaţia funcţiei. Frege susţine că o notaţie corectă trebuie să respecte această condiţie; pentru explicaţii detaliate, a se vedea „Funcţie şi concept", „Despre concept şi obiect". Ne convingem prin încercări că o notaţie rezonabilă pentru conceptul „membru al şirului de numere naturale terminat cu a, dar nu identic cu *a*" trebuie să respecte pretenţia emisă de Frege în cazul cînd conceptul însuşi devine argument al altui operator, cum este „N". Vom scrie, de exemplu, „$Seq_a(\xi)$ & $(\xi \neq a)$", convenind, *apud* Frege, că ζ nu umple locul gol, ci doar îl reprezintă ca atare. Preferinţele noastre se îndreaptă totuşi spre notaţia-lambda, dat fiind că o expresie de genul „λxFx" poate fi utilizată atît pentru clase, cît şi pentru predicate (respectiv, concepte şi extensiunile lor). — În notaţia — lambda „$a = N[\lambda x(Seq_a(x) \& (x \neq a))]$" ar simboliza propoziţia logică de la începutul § 83.

233 Aşadar, va trebui demonstrată validitatea universală a implicaţiei: $S(a, d) \rightarrow \lambda x(Seq_a(x) \& (x \neq a)) = \lambda x(Seq_d(x))$.

234 Abreviind prin „Seq (x)" expresia „x este un membru al şirului numerelor naturale terminat cu *d*", se cere demonstrată propoziţia: $\sim \exists x(Seq_d(x) \& S(x, x))$.

235 Definirea numărului finit conduce implicit la numerele infinite despre care va fi vorba în subcapitolul următor. În esenţă, numărul infinit este un obiect x, astfel încît există un concept F şi x este numărul lui F (adică sfera conceptului sub care cad toate conceptele echinumerice cu F) şi totodată S (x, x). Ultima proprietate se numeşte *reflexivitate*. Numerele cardinale finite sînt ireflexive, cele infinite însă reflexive. În limbajul teoriei mulţimilor, spunem că o mulţime este (de putere) infinită dacă poate fi pusă în corespondenţă biunivocă (fiind deci echinumerică) cu o parte proprie a sa. Aceasta este definiţia infinitului

pe linia Galilei—Bolzano—Dedekind. În definirea infinitului și finitului se mai poate utiliza altă proprietate, şi anume *inductivitatea*. Un număr cardinal îl numim inductiv dacă este zero sau se obţine prin adăugare succesivă de unităţi plecînd de la zero şi construind pas cu pas succesorii săi, 1, 2, 3 ... Numerele cardinale finite sînt inductive; numerele infinite au aşadar proprietatea non-inductivităţii. Principiul inducţiei matematice este aplicabil tocmai la numerele inductive, adică finite.

[236] În încheierea acestui subcapitol în care am făcut apel adesea la limbajul formulelor se cer cîteva precizări: *Fundamentele aritmeticii* ocupă o poziţie mediană în tripticul marilor cărţi ale lui Gottlob Frege, încadrată fiind de *Scrierea conceptuală* şi *Legile fundamentale ale aritmeticii*, cărţi în care aplicarea limbajului specios al formulelor solicită toată perspicacitatea cititorului şi satisface într-o măsură rareori egalată spiritul lui de acribie. Transcrierea asertiunilor logico-aritmetice în notaţiile originare se poate urmări în *Begriffsschrift* (vezi în special cap. III, Einiges aus einer Allgemeinen Reihenlehre) şi în *Grundgesetze*, I (în special §§ 38—46). O vastă listă de lucrări din logica matematică şi filosofia matematicii s-ar cere menţionată în legătură cu ecourile şi răsfrîngerile de care demersul de logicizare a aritmeticii a avut parte, de la Cantor, Husserl, Russell şi pînă astăzi. Pentru transcrierea modernă a formulelor fregeene am consultat cîteva lucrări introductive în materie, printre care excelenta ***Einführung in die symbolische Logik*** a lui Rudolf Carnap (Springer-Verlag, dritte Auflage, 1968). Notaţiile sînt uzuale, exceptînd cîteva modificări minore.

[237] Frege vorbeşte despre numerele infinite introduse de Cantor ca despre obiecte familiare oricărui matematician, ceea ce poate surprinde, întrucît acceptarea lor — cum ştim — a presupus o penibilă perioadă de acomodare a matematicianului obişnuit la un nou mod de a gîndi numărul ca abstras din compararea mulţimilor oarecare. Fără îndoială că Frege ajunsese la numărul infinit pe propria lui cale, independent de Cantor, tot aşa cum în *Begriffsschrift* redescoperise vechea logică a stoicilor şi acoperise pe cont propriu domeniul îmbrăţişat de algebra logicii.

[238] Ceea ce este numai formularea exactă a faptului că avem o infinitate de numere finite. Întrebarea adiacentă este dacă

orice număr infinit trebuie să revină unui concept sub care cad entităţi abstracte, de natură matematică, sau dacă putem găsi un concept îmbrăţişînd numai entităţi concret-materiale şi căruia îi revine un număr infinit.

[239] In timp ce Cantor se vedea obligat să recurgă la speculaţii metafizice nebuloase — un întreg amalgam de consideraţii laic-filosofice şi teologice! — pentru a asigura numerelor şi mulţimilor infinite „dreptul la viaţă", Frege rămîne pe terenul solid al logicii, cu încredinţarea că infinitul nu necesită o intuiţie sau reprezentare specială, ci numai o recunoaştere raţională.

[240] Georg Cantor (1845—1918), unul din titanii matematicii, pe cît de contestatar pe atîta de contestat, a creat teoria mulţimilor, aritmetica numerelor transfinite, a pus piatra fundamentală la temelia topologiei şi a adus contribuţii marcante în algebră şi teoria funcţiilor. S-a ocupat totodată de istoria matematicii şi filosofia infinitului. Printre operele sale se numără *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (însumarea a şase memorii elaborate între anii 1879—1884, adică exact între anii în care apar *Begriffsschrift* şi *Grundlagen der Arithmetik!*) şi *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895—1897). „Fundamentele unei teorii generale a varietăţilor" — la care se referă aici Frege — apăruse în broşură separată înainte de a intra, ca al cincilea memoriu, în prima din cărţile susmenţionate. Fragmente substanţiale din opera lui Cantor sînt accesibile cititorului de limbă română în Oskar Becker, *Fundamentele matematicii,* Ed. Şt., 1968, pp. 308—346 şi Jean Cavaillès, *Studii asupra teoriei mulţimilor,* Ed. Şt., 1969, pp. 145—208. — Opera lui Cantor a deschis matematicii porţile unui tărîm nou, infinitul actual: un paradis — după expresia lui Hilbert — din care matematicienii refuză a se mai lăsa izgoniţi. Pe baza teoriei mulţimilor creată de Cantor s-a putut clădi întreaga matematică existentă, însă gravele dificultăţi de ordin fundaţional suscitate de teoria mulţimilor au deschis o etapă de criză fără precedent în fundamente; inaugurată de descoperirea paradoxelor, criza n-a putut fi soluţionată integral nici prin axiomatizările succesive ale teoriei mulţimilor de către Zermelo-Frenkel, von Neumann, Hilbert-Bernays ş.a., şi nici prin edificarea teoriei tipurilor. Astăzi ştim că nu se poate da o demonstraţie absolută de consistenţă pentru

teoria mulţimilor, că nu putem decide între axioma alegerii şi negaţia ei, între ipoteza continuului şi negaţia ei; asemenea rezultate negative, obţinute de Gödel, Cohen ş.a., se înscriu ca tot atîtea dezminţiri ale promisiunii de paradis platonic al cunoaşterii matematice, promisiune pe care părea s-o aducă cu sine teoria mulţimilor. În contrast cu statutul fundaţional incomod al teoriei mulţimilor, aceasta oferă confort tehnic şi asistenţă întregii matematici, transformînd-o într-o ştiinţă a structurilor. Raportul dintre logică şi teoria mulţimilor ridică întrebări a căror lămurire — în măsura în care poate fi vorba de aşa ceva într-un domeniu prin excelenţă deschis — depăşeşte acest cadru: este oare teoria mulţimilor varianta pur extensivistă a logicii de ordin superior, iar logica predicatelor combinată cu teoria tipurilor o complicare comprehensivistă a teoriei mulţimilor? Şi, în definitiv, este logica de ordin superior logică propriu-zisă? Iar teoria mulţimilor este ea o teorie matematică bună? Vocile minoritare care au răspuns în sens negativ nu vin totuşi de la periferia matematicii; e vorba despre un Brouwer, de pildă, cînd trecem în revistă evaluările care înscriu teoria clasică a mulţimilor la pasivul matematicii. Corespondenţa şi divergenţele dintre punctul de vedere logic şi cel al teoriei mulţimilor sînt personificate de eşecul dialogului Frege—Cantor (cf. şi Notiţa introductivă). Deşi este schematică şi pînă la urmă incorectă conceperea logicii şi teoriei mulţimilor ca două limbaje în totul diferite care spun aceleaşi lucruri despre aceleaşi lucruri, reducerea aritmeticii la logică se dovedeşte echivalentă cu reducerea ei la teoria mulţimilor. Pe acest teren mai restrins, echivalarea chestionată mai sus devine deci posibilă iar cititorul lui Frege, dacă este matematician, va înclina să spună că logicismul lui Frege era o primă încercare de a reduce numărul la mulţime, însă o încercare avînd forma inutil complicată, alambicată cu subtilităţi filosofice, de care ne putem prea bine dispensa. Nu se poate obiecta nimic acestui punct de vedere — în afară de faptul că uită de dragul matematicii interesul dezvoltării logicii ca ştiinţă de sine-stătătoare. Dar era acesta din urmă un interes fregean?

241 Am simţit nevoia să traducem aici „Wirklichkeit", adică „realitate", prin „actualitate"; terminologia lui Frege manifestă o anumită inconsecvenţă, deoarece în § 26 se făcea o distincţie

între *obiectiv* și *real* (das Wirkliche). Dacă ar fi rămas fidel acelei terminologii, Frege trebuia să spună că numerele infinite sînt obiective, fără a fi propriu-zis reale.

[242] Cantor numește „Mächtigkeit" ceea ce Frege numește „Anzahl".

[243] Am tradus ad-hoc „Folgen in einer Succession" prin „succesiune în cadrul unei consecuții", iar „Folgen in einer Reihe" prin „succesiune într-un șir".

[244] Într-adevăr, din punct de vedere epistemologic Cantor pune în joc în mod esențial intuitivitatea construcțiilor matematice, în timp ce Frege invocă numai raționalitatea intrinsecă a conținutului.

[245] În pofida unor observații terminologice minore, Frege înțelege însemnătatea rezultatelor cantoriene, solidarizîndu-se cu orientarea filosofică subiacentă. Singura divergență mai serioasă privește numărul ordinal. Cantor introduce pentru mulțimile transfinite neglijate de către Frege numărul respectiv ca tip de ordine (Ordnungstypus).

[246] Ultimul capitol al cărții lui Frege nu este un simplu rezumat al analizei logico-filosofice, ci reluarea și adîncirea cîtorva teme, printre care definiția numărului întreg pozitiv și a celorlalte genuri de numere, critica teoriilor formale ș.a.

[247] Frege se exprimă precaut, vorbind despre plauzibilitatea (probabilitatea: *Wahrscheinlichkeit*) și nu certitudinea tezei logiciste asupra naturii analitice a enunțurilor aritmetice. El se explică și în § 90. Pentru a certifica teza mai rămîneau să fie deduse pas cu pas legile aritmeticii, pe baza definițiilor instituite. Acestei sarcini, Frege i se dedică în *Grundgesetze der Arithmetik*. Pînă la urmă însă, din cauza inconsistenței sistemului, teza logicistă va deveni încă mai puțin plauzibilă.

[248] Axiomatizarea logicii se substituie, potrivit acestui punct de vedere, axiomelor aritmeticii. În fapt, în capitolul anterior Frege a tradus deja ceea ce mai tîrziu vor fi axiomele lui Peano în enunțuri și definiții logic-valide.

[249] Să se observe că Frege nu reifică obiecte abstracte ca numerele, după cum nu reifică suportul numerelor, conceptele deci;

un imperiu autonom al conceptelor este de negăsit la logicianul german. E drept că ulterior formulările sale (în „Der Gedanke", de exemplu) capătă o coloratură platonică mai pronunțată, Frege vorbind tocmai despre a treia lume — a gîndului. Dar și atunci accentuarea punctului de vedere realist nu ajunge la fantasmagoria unei lumi autonome, desprinsă de subiect și obiect. În pasajul la care am poposit, Frege spune pur și simplu: conceptele și numerele nu sînt obiecte concret-materiale în spațiu, așa cum nu sînt nici evenimente psihice temporale, reprezentări.

[250] Motivație subtilă a tezei logiciste: conceptele — se sugerează — există și ele în judecăți, adică în stări de lucruri care *pot fi* gîndite și exprimate în limbaj. Nu mai avem a ne întreba *unde* există numerele, căci ele nu există indepedent de concept, dar conceptul nici el nu există decît în și prin judecată. Dar judecățile însele? Realismul conceptual al logicii tradiționale va fi fost el tradus de Frege într-un realism judicațional? Dar un realism care nu ajunge la hipostazierea judecăților, adică la constituirea lor într-o lume autonomă și primordială își onorează titulatura. Recunoaștem că există legi ale naturii, de exemplu, dar nu recunoaștem că aceste legi există în spațiu și timp în același mod în care există fenomenele în care se manifestă. Obiective fiind, legile nu sînt obiectuale ori fenomenale. Căci conceptul — cu o vorbă memorabilă a lui Frege — poate fi distins dintr-o combinație, dar nu poate fi rupt de acolo. Cazul judecății, al gîndului, nu este în fond altul, căci lumea și limbajul sînt realități globale, ale căror elemente — stările de fapt — pot fi distinse dar nu autonomizate ontologic. Să ne oprim însă aici, întrucît Frege nu a sondat adîncimea judecății, joncțiunea pe care o operează gîndul, posibilul conținut de gîndire, între subiect și obiect. — Caracterizarea legilor aritmeticii ca „legi ale legilor naturii", deci legi ale judecăților, este în tonul întregului logicism, și avem aici nu un simplu „mot d'esprit", ci o cale de explorare a conexiunii aritmeticii cu experiența. Afirmația s-ar putea interpreta ca spunînd: analiza enunțurilor aritmeticii duce la enunțuri despre enunțuri, la predicate de predicate, adică la logica de ordin superior.

[251] Vezi *Critica rațiunii pure*, ed. rom., p. 49.

[252] *Op. cit.*, p. 52.

[253] Pentru Frege, propoziţiile analitice — în speţă, propoziţiile logicii — pot fi informative, căci ele extind cunoştinţele noastre. Explicaţia provine dintr-un nou mod de a înţelege definiţia conceptului. Imaginea propusă — dezvoltarea plantei din sămînţă — sugerează înlocuirea unei viziuni mecaniciste asupra demonstraţiei şi definiţiei prin alta organică, mai aptă să redea complexitatea demersului raţional.

[254] *Estetica transcendentală* porneşte de la o premisă evitată de Frege într-un spirit extrem raţionalist, anume că „... orice gîndire trebuie să se raporteze în cele din urmă, fie direct *(directe)*, fie pe ocolite *(indirecte)*, cu ajutorul unor anumite caractere, la intuiţii, prin urmare, la noi, la sensibilitate, fiindcă altfel nici un obiect nu ne poate fi dat" (*Critica raţiunii pure*, ed. rom., p. 65).

[255] *Op. cit.*

[256] Kant şi Leibniz sînt filosofii cărora Frege le datorează cele mai fecunde înrîuriri. Însă logicismul fregean înseamnă o întoarcere în planul filosofiei aritmeticii de la Kant la Leibniz.

[257] De la analiza conceptelor şi instituirea definiţiilor sîntem trimişi către instituirea axiomelor şi analiza demonstraţiilor. Este sugerată cerinţa reducerii demonstraţiilor la cîteva procedee elementare, fundamentale ca una din exigenţele metodei axiomatice. Explicitarea logicii subiacente condiţionează succesul demersului axiomatic.

[258] Notînd prin „φ" relaţia care generează şirul respectiv, avem: $(Un_1(\varphi) \& S\varphi(m,x) \& S\varphi(y, x) \rightarrow (S\varphi(m, y) \vee y = m \vee S\varphi(y, m)))$.
A se vedea notele 190, 192.

[259] Acest unic mod de inferenţă este *modus ponens* sau regula de detaşare: dacă atît o implicaţie cît şi antecedentul acesteia sînt demonstrate, atunci şi consecventul este demonstrat. În fapt, Frege foloseşte şi regula de substituţie, fără s-o mai includă în rîndul modurilor de inferenţă.

[260] Într-un limbaj mai riguros întrebarea lui Hankel — după ce o decantăm, înlăturînd formulările kantiene — este dacă o construcţie formală coerentă în genul unei totalităţi de numere

admite o interpretare, un model, aşa cum numerele complexe, de exemplu, au putut fi interpretate de Gauss în planul geometric. Acest mod de a pune problema raportînd structura la interpretările posibile, datează în logică cel puţin de la Boole şi este paralel cu evoluţia algebrei abstracte. În lectura lui Frege problema capătă un sens diferit, mai apropiat de acela tradiţional, derivat din epistemologia aristotelică. Se presimte deja dificultatea întîmpinată de Frege în a înţelege fecunditatea axiomaticii formale hilbertiene.

[261] Obiectivitatea numărului este reafirmată de către Frege într-un spirit care nu este idealist-obiectiv, întrucît nu postulează un domeniu existent autonom, în afara subiectului în acelaşi sens în care subzistă lumea exterioară, nu este kantian, întrucît nu presupune intuiţia şi experienţa posibilă, dar este raţionalist şi înţelege obiectivitatea în sensul gnoseologic de „acelaşi pentru toţi". Frege împrumută de la Kant ideea obiectivităţii ca validitate universală, însă la o analiză atentă constatăm că fuziunea raţionalismului leibnizian cu acela kantian conferă sintezei fregeene calităţi pe care sursele nu le aveau, la fel cum un aliaj capătă proprietăţi de negăsit la metalele componente. Numerele sînt aceleaşi pentru toţi, din cauză că înseşi purtătoarele numerelor, conceptele adică, sînt aceleaşi pentru toţi; or, în raport cu obiectele despre care pot fi predicate, conceptele sînt — cum am văzut — *proprietăţi* distinse ca atare, dar în fapt inseparabile de obiecte prin însuşi modul lor propriu de a fi. Dar astfel, de la sensul secund al obiectivităţii am ajuns în preajma sensului prim, ontologic. Kantiană, teoria lui Frege asupra conceptului nu este decît în privinţa — irelevantă aici — a predicativităţii conceptului.

[262] Frege tinde să confunde problemele genetic-epistemologice cu aspectele psihologice ale cunoaşterii umane — reacţie la psihologismul logic, dar şi la scientismul naturalist al epocii sale.

[263] Problema necontradicţiei se pune la nivelul conceptelor, al propoziţiilor şi al sistemelor de axiome. Poziţia lui Hankel pare să îmbrăţişeze şi cazul sistemelor axiomatice. Un sistem formal-axiomatic poate fi considerat ca definind un concept *sui-generis,* şi anume conceptul sub care cad toate modelele care

satisfac sistemul. În măsura în care răspunsul lui Frege vizează numai conceptul, critica fregeană a teoriilor formale rămîne unilaterală. Dar cîteva observații pătrunzătoare par să indice uneori depășirea cadrului conceptelor izolate, în favoarea conceptualității axiomatice, sistemice. O citire a textului schimbînd acolo unde este cazul „concept" prin „sistem formal" se dovedește în orice caz instructivă.

264 Reciproca presupune a demonstra că unui concept i se subsumează cel puțin un obiect în cazul cînd conceptul este necontradictoriu. Frege îl critică mai jos pe Hankel pentru această eroare. Comentînd întreaga secțiune se poate replica *adversus* Frege: dacă în locul conceptelor considerăm conceptele *sui-generis* definite prin sistemul formal al postulatelor, atunci reciproca este valabilă, căci un sistem necontradictoriu admite întotdeauna un model. A pretinde lui Frege sau Hankel claritate deplină în această privință ar fi un anacronism, deoarece lucrurile s-au clarificat abia pe baza teoriei modelelor (Hilbert, Skolem ș.a.). Introducerea numerelor negative în modul în care procedează Hankel (și întreaga tradiție matematică) face uz de existența unui model, garantată de presupusa necontradicție a sistemului de postulate ale operațiilor.

265 Totuși necontradicția înseamnă deja existență la nivelul sistemelor de axiome, și anume *existență a unui model*. Privitor la prima parte a criticii lui Frege — observația că undeva se poate strecura oricînd o contradicție: ironic și dramatic este faptul că însuși autorul sistemului axiomatizat din *Grundgesetze* nu va înțelege gravitatea obiecției, din ea decurgînd cerința unei demonstrații de necontradicție. Frege nu introducea noi numere, însă introducea alte entități imposibile: extensiunile unor concepte rău definite.

266 Teoriile formale ale numerelor negative, raționale, complexe și infinite sînt criticate de Frege pentru pretenția lor de a *postula implicit existența* unor domenii de entități prin descrierea proprietăților formale ale entităților respective. Frege este îndreptățit să critice aici absența demonstrației de necontradicție, fără care sistemul ipotetico-deductiv al postulatelor nu are acoperirea necesară introducerii legitime a entităților matematice vizate.

267 Exemplul cu Luna sună curios, dar argumentaţia este solidă. Presupoziţia sa este că o funcţie şi un concept (de ordinul întîi) trebuie să fie *peste tot definite* (adică definite pe domeniul tuturor obiectelor). Admiţînd cerinţa de mai sus, exemplul nu mai este şocant. Dar presupoziţia ca atare este discutabilă, ea suscitînd dificultăţi însemnate.

268 Un profan ar putea găsi, eventual, în toate aceste consideraţii anticiparea unui mod familiar fizicii de a interpreta, de a găsi referinţe fizice semnelor matematice. Interpretarea semnului *i* ca interval temporal se asociază în mintea profanului — de ce nu? — cu axa imaginară a timpului în cadrul continuului spaţio-temporal einsteinian. Apropierea este, de bună seamă, forţată în litera ei; căci la Frege e vorba de a interpreta entităţile matematice, în timp ce la Einstein, dimpotrivă, punctul de pornire este fenomenul fizic. Dar asemenea aprecieri, oricît de forţate ar fi, sînt utile cel puţin ca gimnastică a minţii. — În altă ordine de idei, trebuie spus că Frege s-a dovedit ocazional şi un epistemolog pătrunzător, aşa cum relevă articolul său „Über das Trägheitsgesetz" din 1891.

269 Amplificată, observaţia l-ar fi condus pe autor în situaţia de a se întreba asupra coerenţei propriului său sistem formal, ctitorind astfel investigaţia metamatematică în ceea ce are ea mai specific.

270 Cunoscuta interpretare a numerelor complexe se datorează lui Gauss.

271 Aceasta este întocmai dilema logicismului: sau introducem intuiţia ca sursă de cunoaştere — atunci raţionalismul riguros al lui Leibniz suferă o corecţie severă şi strămutarea logicismului pe alte vetre filosofice devine inevitabilă — sau operăm cu definiţii ale conceptelor care însă nu garantează existenţa; cu definiţii care sînt tot atîtea „dovezi ontologice" sofistice ale existenţei. Soluţia lui Frege — aşa cum acesta se explică mai jos — rezidă în a defini numerele ca obiecte, nu concepte (punînd astfel în joc unul din principiile directoare enunţate în Introducere), în a disocia obiectul şi definiţia logică de reprezentarea asociată obiectului logic (intră atunci în joc un alt principiu

director); şi în a utiliza definiţiile prin abstracţie, pornind de la judecăţi de recogniţie (aplicînd al treilea principiu fundamental).

272 Aici, ţinta criticii lui Frege nu este numai psihologismul, ci şi sursa lui primă, doctrina kantiană a cunoaşterii. Întrebarea este dacă logicismul nu dispune aici prea repede de un adversar redutabil. Mai multe disocieri se cer făcute: 1) disocierea între intuiţia şi reprezentarea obiectului: cînd cerem ca obiectul să fie dat în intuiţie nu ridicăm pretenţia fuziunii sale cu cîmpul subiectiv al reprezentărilor; 2) disocierea întru dat a actualului de potenţial, disociere din care ţîşneşte tocmai ideea de construcţie, mai precis de constructibilitate. Spre a vorbi despre $1000^{(100^{01000})}$ — ca să luăm exemplul adus de Frege — intuiţia nu are nevoie de prezentarea (sau reprezentarea) a tot atîtor obiecte, ci de posibilitatea unor construcţii succesive care în cele din urmă conduc la obiectul respectiv. Intuiţie şi constructibilitate sînt asociate în gnoseologia kantiană, dacă nu în litera ei, cel puţin în plauzibila tîlmăcire contemporană, care constă în a asimila intuirea unor obiecte posibile de experienţă cu actul de înţelegere a procesului de construcţie. Intuiţia devine deci un act intelectual care împărtăşeşte cu aprehendarea sensibilă aparenţa nemijlocirii, însă — ca orice construcţie — mai presupune o spaţio-temporalitate abstractă, o structură logică izolabilă. Poziţiile care se opun nu sînt ireconciliabile decît de la un punct încolo; ele colaborează pe o porţiune a drumului cunoaşterii matematice. Atunci deci cînd construcţia logicistă a numărului natural îşi urmează cursul ştiut, conturînd prin structura ei definiţia genetică a mulţimii numerelor naturale, filosofia kantiană a matematicii sau intuiţionismul contemporan pot pretinde — şi nu fără temei — că aici avem numai discursivizarea unei intuiţii a cărei natură este discutabilă dar a cărei existenţă rămîne certă. Divergenţa se reaprinde dincolo de acest punct, fiindcă în timp ce una din abordări rămîne la infinitul potenţial, cealaltă îl absoarbe în mulţimea actual infinită a entităţilor ca într-un dat, anterior cunoaşterii matematice.

273 În „Über formale Theorien der Arithmetik" (articol din 1885), Frege explică pe larg distincţia dintre cele două accepţii ale termenului „teorie formală". El scrie: „Sub denumirea de

«teorie formală» voi considera aici două modalități de abordare, dintre care pe prima o accept, în timp ce pe cealaltă urmăresc s-o infirm. Prima susține că toate propozițiile aritmetice pot fi derivate pur logic numai din definiții iar ca atare ele și trebuie să fie derivate astfel...". A doua concepție care poate fi desemnată drept teorie formală „afirmă că semnele numerelor 1/2, 1/3, numărul π ș.a.m.d. sînt semne goale". Potrivit acestei concepții — explică Frege — numerele sînt înseși semnele. O variantă a „teoriei formale" de acest gen este afirmația după care „numerele există atunci cînd putem calcula cu ele" (în *Kleine Schriften*, 1967, pp. 103, 105, 110).

[274] Profesiunea de credință a raționalismului consecvent este condensată aici într-un aforism care luat în sine parafrazează nu doar „o afirmație bine cunoscută" — cum spune Frege —, ci o întreagă declarație de intenții. Stă în natura demersului filosofic tendința de a-și depăși cadrul inițial, rîvnind atotcuprindere, adică nimic mai puțin decît absolutul. Așa și raționalismul: punctul de pornire este rațiunea care se înțelege pe sine ca excelentă, ca mijloc suveran al cunoașterii. Însă raționalismul tinde să transforme rațiunea în factor ontologic, convertind procesul prin care se ia pe sine ca obiect în miraj, prin care ia obiectul ca pe sinele său. A vedea în rațiune numai un mijloc de cunoaștere înseamnă a face din ea un accident care lasă neexplicat modul esențial de a fi (încă) necodificabil al rațiunii umane: temeritate, spirit explorator, proiect, fantezie. Întrebarea rămîne totuși dacă raționalitatea indubitabilă a lumii — matematica ei, spre exemplu — o privim ca pe produsul rațiunii, expresia ei fenomenală, sau ca pe suportul ei. Răspunsul nu poate fi atît de simplu ca întrebarea dar el pornește în orice caz de la precizarea că raționalitatea subiacentă lumii fără om stă întru început față de rațiune și față de construcțiile ei splendide într-un raport omolog celui în care stau undele lumii față de culorile omului și față de văz ca produs al evoluției multietajate; raport *omolog* tocmai, căci omologia nu este analogie, rațiunea nu se mărginește a face oficiile unui mecanism traductor sofisticat al raționalității obiective; strădania sa este de a modela, de a *unelti*, orientînd *lucrarea lumii* după criterii dictate de praxis, semioză, comunicare. A înțelege deci maxima „obiectul

propriu al rațiunii este rațiunea" ca derivînd din convingerea că „obiectul propriu al omului este omul" înseamnă a face dreptate raționalismului, corectînd o inconsecvență născută din spirit rectiliniu. — Însă aceste observații ne abat de la gîndul lui Frege. Nu a stat în intenția lui să contureze o doctrină raționalistă globală, nici să hipostazieze rațiunea în maniera unui realism platonic; tot așa, nimic mai opus adevărului istoric decît imaginea unui doctrinar reluînd în contul matematicii ontologia hegeliană. Enunțul lui Frege nu este de natură ontologică, ci epistemologică, așa cum lămurește el însuși în fraza imediat următoare. Sursa aforismului fregean — așa cum un șir de exegeți au ținut să precizeze, în deplin consens — este de găsit la Kant. Numai luîndu-se pe sine ca obiect — și anume ca obiect de critică — rațiunea pură ajunge să dea răspuns întrebărilor fundamentale ale lumii, răspuns constînd în bună parte în clarificarea sensului, importanței și locului lor, ca și în strămutarea lor de pe terenul ontologiei pe acela al epistemologiei, axiologiei ș.a.m.d. Analog, sugerează Frege, aritmetica este obiect al rațiunii. — Ca atare, aforismul rămîne un test al rădăcinilor raționaliste ale concepției lui Frege, fără să aducă un element cu adevărat nou față de precizările anterioare.

275 Distincția, de ordin logico-gramatical, era cunoscută în filosofia tradițională. Primul capitol al *Categoriilor* lui Aristotel introduce patru tipuri de entități după criteriile de a fi sau a nu fi într-un subiect și de a se putea enunța sau nu despre un subiect (vezi și Studiul introductiv, p. XLII). Numărul individual, fiind desemnat ca nume propriu și nu ca adjectiv, este un obiect abstract, un subiect de predicație. Dificultățile legate de sistematizarea ontologică a entităților sînt considerabile, îndeosebi dacă nu recurgem la ierarhizarea entităților după tipuri, ceea ce — aproximativ — ar corespunde treptelor succesive de abstractizare. Frege a evitat aici angajarea în analize mai complicate, preferînd să rămînă pe terenul ferm al logicii, însă în „Funcție și obiect" și „Despre concept și obiect" el introduce distincția dintre entități saturate și nesaturate, pornind de la distincția similară în planul expresiilor; analiza sa logică reînnoadă astfel firul cu tradiția filosofică.

276 Am tradus „Gleichung" prin „egalitate" și „Gleichheit" prin „identitate"; „Gleichung" vizează de fapt *expresia* unei relații de egalitate, adică „ecuația".

277 Frege va explica în scrierile ulterioare — începînd cu „Funcție și concept" — înțelesul intuitiv al expresiei „extensiune a conceptului" („sferă") prin conceptul de „parcurs valoric" *(Werthverlauf)*. Conceptele sub care cad exact aceleași obiecte au același parcurs valoric. — Afirmația lui Frege după care apelul la extensiunea conceptului nu are importanță decisivă poate fi interpretată în două feluri. În primul sens, am fi ispitiți să vorbim despre clase (mulțimi) oarecare, independent de concept, la modul lui Cantor; este totuși limpede că Frege găsea absolut inacceptabil apelul la clase fără concepte. De aceea, în al doilea sens, sîntem autorizați a presupune că Frege are în vedere apelul direct la concepte, așa cum specifică explicit în nota de la finele § 68. Pînă la urmă, Frege nu s-a putut dispensa de oficiul parcursurilor valorice, al extensiunilor de concepte. În *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege postulează fără restricții — și cu consecința dezastruoasă a paradoxului russellian — că două funcții au aceleași parcursuri valorice dacă și numai dacă iau aceleași valori pentru aceleași argumente. Simplificarea aparatului formal prin adoptarea unui „limbaj extensional" — cum obișnuim a spune astăzi — nu înseamnă că primatul conceptului asupra extensiunii sale este abolit. Frege rămîne pînă la urmă, în planul intențiilor teoretice, un comprehensivist.

278 A se vedea nota 264.

279 Deznodămîntul tentativei îndrăznețe a lui Frege de a elucida enigma numărului este — în ordinea spiritului — tragic: logicismul viza transcenderea unei limite care nu a cedat. Ținta finală nu a fost atinsă, însă mijloacele și-au afirmat dreptul la o viață autonomă. Frege personal a resimțit cu acuitate proporțiile înfrîngerii. Spre sfîrșitul vieții, el fixează cu luciditate situația, retranșîndu-se pe noi poziții fundaționale. Rîndurile sale sînt epilogul cel mai potrivit la o lectură comprehensivă și detașată a *Fundamentelor aritmeticii:* „Sforțările mele de a aduce lumină în chestiunile legate de cuvîntul «număr», legate de numeralele disparate și de simbolurile numerice par a se fi încheiat

printr-un eşec deplin. Şi totuşi, aceste sforţări nu au fost cu totul zadarnice. Tocmai prin acest eşec ele pot conduce la cunoaştere. Dificultăţile suscitate de aceste investigaţii sînt nu odată subapreciate...". „... Cu cît am meditat mai mult... cu atît m-am convins mai mult că aritmetica şi geometria au crescut pe acelaşi fundament, şi anume pe acela al geometriei, încît întreaga matematică este propriu-zis geometrie" (*Nachgelassene Schriften,* pp. 285, 297). Sursa geometrică a cunoaşterii — precizează Frege — colaborează cu sursa logică pentru a ne da matematica în unitatea ei (*ibid.*, pp. 298—299).

Astfel, după o călătorie de 40 de ani în deşert, proiectul de unificare a logicii cu aritmetica sub sceptrul analiticităţii se frînge sub propria sa povară, elementul sintetic *a priori* reapărînd în prim plan.

FUNCȚIE ȘI CONCEPT

NOTIŢĂ INTRODUCTIVĂ

Avem în faţă unul din cele mai cuprinzătoare articole pe care le-a scris solitarul gînditor german. Urmărind cu atenţie mişcările de idei ale vremii sale, lucrările contemporanilor săi în domeniul logicii şi fundamentelor matematicii, Frege era, în 1891, puţin cunoscut; nevoia de a se face auzit îi apărea cu atît mai presantă cu cît primul volum al operei sale capitale *Grundgesetze der Arithmetik* se afla într-un stadiu avansat de pregătire şi avea să apară peste doi ani. Şapte ani se scurseseră de la apariţia *Fundamentelor aritmeticii;* primirea rece făcută acestei cărţi era descurajatoare. În intervalul 1884—1890, Frege a publicat puţin: un articol „Cu privire la teorii formale ale aritmeticii", o recenzie şi un succint răspuns la recenzia făcută *Fundamentelor aritmeticii* de către G. Cantor. Începînd din 1891, activitatea sa publicistică cunoaşte un ritm accelerat: în 1891 îi apar două articole („Cu privire la legea inerţiei" şi „Funcţie şi concept"); în anul următor va publica „Sens şi semnificaţie", „Despre concept şi obiect", precum şi o recenzie la o carte a lui Cantor.

Ca şi alte articole ale lui Frege, cel de faţă a fost comunicat la o şedinţă a Societăţii pentru Medicină şi Ştiinţele Naturii din Jena (la 9 ianuarie 1891). Asemenea comunicări se publicau, de obicei, în „Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft", supliment la „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft". De această dată însă, Frege s-a decis să-şi publice articolul într-o broşură separată. Opusculul (Jena, Hermann Pohle, 1891) era precedat de următorul Cuvînt înainte care lămurea intenţiile autorului: „Prezint în ediţie separată această comunicare cu speranţa că ea îşi va găsi astfel cititori cărora, în „Lucrările Societăţii pentru Medicină şi Ştiinţele Naturii", ea le-ar fi rămas necunoscută. Aşa cum am mai anunţat deja, am intenţia să prezint în viitorul apropiat o expunere asupra modului în care formulez, în cadrul scrierii mele conceptuale definiţiile fundamentale ale aritmeticii şi asupra modului în care pe această

bază efectuez demonstrații numai prin intermediul simbolurilor mele. În acest scop, este important să mă pot baza pe această comunicare, spre a nu fi silit să mă lansez acolo în explicații pe care unii le-ar putea omite, crezînd că nu au legătură cu esența chestiunii, în timp ce alții, dimpotrivă, le-ar putea înțelege greșit. Comunicarea mea nu se adresează numai matematicianului, așa cum a impus locul în care a fost prezentată; în ce mă privește am încercat să mă exprim astfel încît să fiu înțeles de cît mai mulți, în măsura în care timpul aflat la dispoziție și obiectul o permiteau. Fie ca aceasta să suscite interesul pentru problemă în cercuri științifice mai largi, îndeosebi însă în rîndurile logicienilor".

Bazele teoretice ale notației fregeene și implicit ale modalității logice de analiză a propozițiilor și demonstrațiilor matematice sînt deci acelea ce sînt puse în discuție aici. Ne amintim că în prima sa operă capitală, *Begriffsschrift* (1879), Frege redescoperă calculul propozițiilor și deschide apoi drumuri noi, inventînd ceea ce mai tîrziu se va numi „teoria cuantificării", „logica predicatelor" sau chiar (*vide* A. Church) „calcul funcțional". Invenția acestui calcul pornea acolo de la observația că o expresie în genul unei propoziții singulare, avînd înțeles complet, constituind un întreg încheiat, poate fi privită ca obținută dintr-o altă expresie care conține una sau mai multe părți variabile și o parte constantă obținută tocmai prin înlocuirea părților variabile prin expresii corespunzătoare cu semnificație constantă (astăzi noi am spune: obținută prin înlocuirea părților variabile cu expresii aparținînd *categoriei semantice* corespunzătoare). Partea constantă a expresiei generatoare, Frege o numea *funcție*, partea ei variabila, *argument*; expresia generată prindea ființă prin completarea expresiei-funcție cu o expresie-argument, expresia obținută fiind a unei valori. Limbajul formulelor — *scrierea conceptuala* inventata de Frege — se sprijinea pe acest mod de analiză pentru a simboliza expresiile limbajului obișnuit prin expresii ale aplicarii unei funcții la argumentul (sau argumentele) ei. Totodata, in cazul unor propoziții cum ar fi „bioxidul de carbon este mai greu decît hidrogenul" sau „Cato l-a ucis pe Cato", se întrevad modalități diferite de a descompune expresia într-o parte constantă considerată ca funcție și în altele, privite

ca argumente ale respectivei funcţii. Astfel, luînd prima expresie, o putem construi aplicînd argumentele „bioxid de carbon“ şi „hîdrogen“, în această ordine, la funcţia „este mai greu decît“, sau aplicînd „bioxid de carbon“ la funcţia „este mai greu decît hidrogenul“, sau aplicînd „hidrogenul“ la „bioxidul de carbon este mai greu decît“. Gîndul complet, „conţinutul judicabil“ pe care îl exprimă propoziţia, poate fi deci analizat în feluri diferite, dar mecanismul logic de articulare a ansamblului propoziţional din părţi componente va avea permanent trăsăturile unui proces de aplicare a unor funcţii la argumente.

Fundamentele aritmeticii reamintesc (a se vedea îndeosebi §§ 66, 70) această modalitate de analiză a propoziţiilor şi de abstragere a conceptelor şi relaţiilor din contextul unor propoziţii.

În „Funcţie şi concept“, Frege răspunde exigenţei de aprofundare şi sistematizare a ideilor fundamentale aflate la baza întregului demers logic-fundaţional: *funcţie, concept, obiect*.

Punctul de pornire al analizei lui Frege este limpezirea înţelesului noţiunii de funcţie de un argument, aşa cum o întîlnim în matematica obişnuită. După ce distinge cu claritate între semnul funcţiei şi funcţia însăşi, logicianul german distinge cu egală claritate între semnul funcţiei propriu-zise şi expresiile în care semnul funcţiei fuzionează cu semnul unei alte entităţi, numită argument al funcţiei, spre a da împreună o expresie care desemnează o nouă entitate, şi anume valoarea funcţiei pentru respectivul argument. Facerea şi desfacerea expresiilor în mediul lor lingvistic este pentru Frege locul privilegiat către care, dacă privim, reuşim să vedem mai adînc. Ni se cere *să intuim* că expresia care desemnează o entitate în calitate de valoare a funcţiei pentru un argument dat şi la fel expresia care face parte din prima şi desemnează ceea ce matematicianul numeşte argument al funcţiei au amîndouă un caracter autonom, complet, de sine-stătător, în timp ce expresia care desemnează însăşi funcţia are un caracter incomplet, nesaturat, reclamă o întregire. Incompletitudinea sau nevoia de întregire se manifestă în faptul că expresia care desemnează o funcţie nu conţine în sine semnul argumentului, dar conţine în sine locul gol, necompletat, al semnului argumentului. Sesizînd aceste *distincţii* am întrevăzut natura întrucîtva misterioasă a expresiilor care desem-

nează funcții. Structura semnelor funcționale este deci lacunară; lacuna nu este imediat observabilă întrucît în cadrul expresiilor matematice semnul funcției intervine de obicei în combinație cu semnul care desemnează un argument determinat sau indică în mod indefinit un argument oarecare. Astfel, „$f(x)$" va desemna valoarea unei funcții f( ) pentru argumentul ei x; vorbind despre „funcția f" și nu despre „funcția f( )" păcătuim împotriva gramaticii logice, întrucît, corect utilizată, notația funcției trebuie să-și exprime caracterul originar de a conține înăuntrul ei locul argumentului. Pe de altă parte, să considerăm, de exemplu, o expresie ca „2.1^3+1", expresie care desemnează valoarea luată pentru argumentul 1 de funcția pe care o notăm — nu pe deplin clar — prin „$2.x^3+x$", funcție notată însă corect printr-o expresie de genul „$2.(\ )^3+(\ )$"; Frege ne cere *să intuim* că expresia „2.1^3+1", care din punct de vedere logic este un nume propriu desemnînd un obiect, nu a fost obținută printr-un proces de *juxtapunere liniară* a semnului argumentului peste semnul funcției, ci printr-un proces de *umplere*, de *întregire* a locului gol al expresiei funcției cu un semn al argumentului. Invers, semnul funcției s-a obținut printr-un proces nu doar de desfacere — *analysis* — ci de golire, în așa fel încît golurile să ajungă manifeste. Iată ce ar fi să însemne caracterul nesaturat și incomplet al semnelor pentru funcții; or, acest caracter originar al expresiei spune ceva despre caracterul originar al însăși entității desemnate. Trebuie să admitem — conchide Frege — că funcțiile însele, aidoma expresiilor care le desemnează, nu sînt saturate, au o nevoie de întregire. Dimpotrivă, obiectele — iar valoarea unei funcții de treapta întîi este tocmai un obiect — au caracterul autonom, complet, saturat al expresiilor care le semnifică.

Exegeții lui Frege găsesc că o asemenea concepție asupra funcției este obscură; logicienii de după Frege nu au mai urmat-o fidel, în litera și spiritul ei, abandonînd-o istoricilor. O asemenea înțelegere a naturii funcției conduce, dealtfel, la dificultăți, atunci cînd este combinată cu absolutizarea fregeană a distincției între funcție și obiect; articolul „Concept și obiect" cu care cititorul se va confrunta ceva mai încolo este edificator în această privință. Pe de altă parte, explicația fregeană a funcției își găsește un rival mai norocos în definiția perfect clară pe care teo-

ria mulțimilor o propune pentru aceeași noțiune. În matematica de astăzi, noțiunea de funcție (aplicație) admite o explicație precisă în termenii altor idei, primitive, cum este ideea de mulțime; Frege pornește, dimpotrivă, de la premisa că noțiunile *funcție* și *obiect* sînt ireductibile.

Din punct de vedere teoretic, înțelegerea fregeană a naturii funcției rămîne incitantă. În penumbra sugestiilor despre „nevoia de întregire“ a funcției, a metaforelor lipsite de rigoare, un instinct filosofic puternic lucrează — rămîne de văzut cît de spornic! — pentru reabilitarea „plinului“ și „golului“ ca principii elementare antagonice, inseparabile, ale jocului logic. Să fie oare cu desăvîrșire exclusă eventualitatea unei depășiri constructive a naivității filosofice de acest ordin? Metafora nesaturării contrazice paradigma subînțeleasă a compunerii expresiilor mai complexe în părți care se opun exterior. Așezării una *lîngă* alta a pieselor mozaicului logic, intuiția lui Frege îi opune viziunea unei contopiri intime. Imaginea nesaturării, la care Frege revine într-o serie de articole ca la un leit motiv, ne determină să spunem, de asemenea imagistic, că *atomismului logic* care avea să se revendice — prin Russell și Wittgenstein — tot de la el, Frege i-a opus în principiu, cu anticipație, un anume *chimism logic*.

După ce a precizat natura funcțiilor matematice, Frege trece la expunerea propriei sale contribuții: generalizarea noțiunii de funcție astfel încît ea să-și găsească o aplicare esențială în logică.

Frege pornește de la analiza egalităților și inegalităților, ca structuri propoziționale elementare; egalitățile și inegalitățile sînt considerate, la rîndul lor, ca expresii complete, decompozabile în părți saturate și părți nesaturate, desemnînd obiecte, respectiv funcții. Mai departe, orice propoziție singulară este analizată în același mod; partea nesaturată a propoziției singulare desemnează o funcție, partea saturată un obiect. Analizei tradiționale, care descompunea propoziția singulară în subiect, predicat și copulă, Frege îi opune scindarea bipartită. Propoziția singulară exprimă aplicarea unei funcții la un argument, valoarea funcției fiind desemnată de propoziție. Argumentul funcției este un obiect; valoarea funcției este de asemenea un obiect și anume este valoarea de adevăr a propoziției. Funcția însăși este în acest caz conceptul: funcție de un argument, definită pentru orice obiect și

luînd ca valoare pentru un argument una sau alta din valorile de adevăr.

Corelată cu noţiunea de funcţie este noţiunea de obiect, indefinibilă şi fundamentală: „este obiect tot ce nu este funcţie". Expresiile care desemnează obiecte sînt nume proprii.

Frege numea limbajul său „Begriffsschrift", adică scriere conceptuală. Denumirea se justifică nu prin faptul că Frege ar merge de la concepte spre judecăţi, căci în realitate Frege ajunge la concepte pornind de la datul primar al judecăţii; dar ea se justifică, printre altele, prin utilizarea esenţială pe care Frege o găseşte conceptului în logică. Particularizare a ideii de funcţie în genere, conceptul, în accepţia fregeană, este generalizat din nou în trei direcţii: 1) *relaţiile* sînt înţelese de asemenea ca funcţii, ele se deosebesc de concepte prin faptul că sînt funcţii de două (sau mai multe) argumente şi sînt esenţial similare conceptului, întrucît pot lua în calitate de valori numai două obiecte (logice), şi anume valori de adevăr, iar în articularea gîndurilor (propoziţiilor) relaţiile (respectiv expresiile relaţionale) joacă un rol analog conceptelor, fiind entităţi de asemenea nesaturate; 2) conceptele şi relaţiile se ierarhizează pe trepte, după natura argumentelor pe care le pot admite, iar relaţiile dintre conceptele şi relaţiile aflate pe trepte diferite sînt *analoage* relaţiei elementare dintre obiect şi concept, obiecte şi relaţii etc.; in ierarhia conceptelor şi relaţiilor poate fi întrevăzută *una* din ideile teoriei tipurilor, dar subzistă şi esenţiale deosebiri la care nu este cazul să ne oprim aici; 3) idei logice fundamentale cum sînt negaţia, identitatea, generalitatea, existenţa, implicaţia sînt concepte şi relaţii, adică funcţii luînd ca valori tocmai valorile de adevăr.

Celelalte entităţi cu care are de a face logica sînt *obiecte*. Printre acestea, obiecte strict logice sînt Adevăratul şi Falsul. Dar extensiunile conceptelor sînt de asemenea obiecte *sui-generis:* parcursuri valorice.

Prezentînd conceptele logicii, Frege utilizează totodată notaţia sa conceptuală şi se referă, cel puţin în treacăt, la majoritatea ideilor directoare ale logicii sale.

Unui asemenea tezaur de reflecţii logice i se adaugă o motivaţie logicistă subînţeleasă. În logica de altădată era vorba despre

concepte şi judecăţi, despre subiecte şi predicate. Distincţia dintre subiect şi predicat este însă împinsă de Frege pe un plan secund şi clarificată în lumina distincţiei dintre concept şi obiect, ea însăşi o particularizare a distincţiei mai generale dintre funcţie şi obiect.

Ideea de *funcţie* fusese împrumutată de la matematică; Frege o restituie matematicii, clarificată printr-un efort fundaţionist, dar şi cu ispita unei logicizări radicale: căci dacă obiectele şi conceptele matematicii se puteau defini pe baza logicii, orice funcţie, aşa cum intervine ea în matematica pură, ar urma să fie în tratarea fregeană o funcţie *stricto sensu* logică. Nu i-a fost dat însă acestui proiect să se valideze; el cade împreună cu întregul demers logicist.

Dar dacă matematica a dat logicii noţiunea de funcţie, de unde vine aceea de *obiect?* Negreşit din filosofie, pe filieră logică, epistemologică şi ontologică.

Aşadar, la capătul unei duble lecturi a articolului lui Frege, înţeles mai întîi ca demers de clarificare a unor concepte matematice de bază şi apoi ca demers logicist de matematizare a logicii dar şi de logicizare a matematicii, a treia lectură a articolului se impune: de data aceasta, una filosofică. „Funcţie şi concept" poate fi înţeles ca amorsare a unui demers semantico-ontologic, prin care analiza expresiilor limbii împinge la analiza entităţilor. Dacă motivaţia semantică este făcută limpede de către Frege, consecinţele formal-ontologice se cer deduse cu oarecare sforţări. De vreme ce expresiile se împart în saturate şi nesaturate, ceea ce ele semnifică trebuie să poarte la rîndul lor acest caracter originar; se ajunge astfel la împărţirea fregeană a domeniului „obiectivului" în obiecte şi funcţii.

Demersul lui Frege a fost comparat cu cel aristotelic, de la începutul *Categoriilor*, unde clasificarea expresiilor împinge la o clasificare a realităţilor. Motivaţia formal-lingvistică a împărţirii entităţilor în obiecte şi funcţii clarifică unele aspecte, făcînd însă mai dificilă înţelegerea altora, conturînd posibilitatea apariţiei unor aporii exasperante. Distincţia dintre obiect şi funcţie este absolutizată (a se vedea şi articolul „Concept şi obiect"), iar pe de altă parte *obiectele* sînt puse de către Frege pe acelaşi plan: obiecte concret-senzoriale, numere, parcursuri valorice ale func-

ţiilor, în particular extensiunile conceptelor, gîndurile, valorile de adevăr etc. aparţin, în ontologia lui Frege, unei aceleiaşi trepte de realitate, sînt în egală măsură obiecte. Nu este stabilită o ierarhie logică, ontologică sau epistemică a entităţilor-obiecte, ceea ce face ca însăşi distincţia celor două tipuri de entităţi: funcţii şi obiecte să apară, la o analiză mai fină, problematică. De exemplu, întrucît extensiunea unui concept de treapta întîi este un obiect, conceptul se poate predica despre propria lui extensiune; primatul subînţeles al obiectului faţă de concept este contrazis de primatul conceptului faţă de propria lui extensiune. Cerînd ca un concept să fie peste tot definit pe domeniul universal al obiectelor, Frege agravează dificultatea.

Ontologia formală a lui Frege rămîne pe cît se pare, tributară unui realism hipostaziant, nedorit dar inevitabil, care refuză o ierarhizare a (gradelor de realitate a) obiectelor.

FUNCŢIE ŞI CONCEPT

Cu mai mult timp în urmă* am avut cinstea de a vorbi în faţa acestei Societăţi despre acel ansamblu de simboluri pe care l-am intitulat *Begriffsschrift*[1]. Astăzi, aş vrea să arunc o lumină asupra problemei din alt punct de vedere şi să comunic unele completări şi concepţii noi, a căror necesitate mi-a devenit clară ulterior. Nu poate fi vorba în cele de faţă de a expune integral scrierea mea conceptuală, ci numai de a clarifica anumite idei fundamentale.

Punctul meu de pornire este ceea ce în matematică se numeşte funcţie. Semnificaţia iniţială a acestui cuvînt nu era atît de largă ca aceea la care s-a ajuns mai tîrziu. Va fi oportun să începem cu tratarea acestei prime accepţii şi abia apoi să trecem în revistă extinderile ulterioare. Pentru început, mă voi referi numai la funcţii de un singur argument. O expresie ştiinţifică apare pentru prima oară cu o semnificaţie limpede acolo unde ea este cerută de enunţarea unei legi. În cazul funcţiei, aceasta s-a întîmplat odată cu descoperirea analizei superioare[2]. Acolo s-a pus pentru prima oară problema de a stabili legi valabile pentru funcţii în general[3]. Aşadar, va trebui să ne întoarcem la vremea cînd a fost descoperită analiza superioară, dacă vrem să aflăm ce se înţelegea iniţial în matematică prin cuvîntul „funcţie“. Răspunsul pe care îl vom căpăta la această întrebare va fi, desigur: „Prin funcţie de x se înţelegea o expresie matematică în care figurează x, o formulă care conţine litera x“[4]. Aşadar, spre a lua un exemplu, expresia

$$2 \cdot x^3 + x$$

ar fi o funcţie de x, iar

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

* La 10 ianuarie 1879 şi 27 ianuarie 1882.

ar fi o funcţie de 2. Acest răspuns nu ne poate satisface, deoarece aici nu se face nici o distincţie între formă şi conţinut, între semn şi semnificat[5]; iată o eroare care, de bună seamă, se întîlneşte şi astăzi în mod frecvent în lucrările matematice, pînă şi în cele ale unor autori de vază. Am arătat deja cu un alt prilej* defectele teoriilor formale curente din aritmetică. Se vorbeşte acolo despre semne care nu au şi nici nu sînt destinate a avea un conţinut, dar cărora li se atribuie totuşi proprietăţi care nu pot fi considerate în mod raţional decît ca aparţinînd conţinutului unui semn. Tot astfel şi aici: o simplă expresie, forma unui conţinut, nu poate constitui miezul chestiunii; aşa ceva numai conţinutul însuşi poate fi. Ce conţinut, ce semnificaţie are însă „2.2^3+2"? Acelaşi conţinut, aceeaşi semnificaţie ca „18" sau „3.6". Ceea ce se exprimă în egalitatea „$2.2^3+2=18$" este faptul că ansamblul de semne din partea dreaptă are aceeaşi semnificaţie ca cel din partea stîngă. Aici trebuie să mă ridic împotriva ideii că, de exemplu, 2+5 şi 3+4 sînt desigur egali, dar nu aceiaşi. Această opinie se întemeiază pe aceeaşi confuzie între formă şi conţinut, între semn şi semnificat. Este ca şi cum am vrea să considerăm că violeta plăcut mirositoare diferă de *Viola odorata*, pe motiv că numele lor sună altfel[7]. Deosebirea de desemnare nu poate fi în ea însăşi un temei suficient al deosebirii înăuntrul semnificatului. Singurul motiv pentru care lucrurile sînt mai puţin evidente în cazul nostru este faptul că semnificaţia numeralului nu este ceva perceptibil prin simţuri. Tendinţa foarte răspîndită de astăzi de a nu recunoaşte ca obiect decît ceea ce este perceptibil în mod senzorial ne împinge astfel să considerăm înseşi expresiile pentru numere în calitate de numere, deci în calitate de obiecte propriu-zise ale investigaţiei**; or, dacă lucrurile ar sta în-

* *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, § 92 şi urm. şi „Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft", 1885, şedinţa din 17 iulie[6].

** A se vedea articolele: „Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet" de H. v. HELMHOLTZ şi Über den Zahlbegriff de LEOPOLD KRONECKER (Philosophische Aufsätze. *Eduard*

tr-adevăr așa, 7 și 2+5 ar fi efectiv diferite. Dar o asemenea concepție nu poate fi susținută, deoarece nu putem vorbi despre o proprietate aritmetică a unui număr, oricare ar fi el, fără a ne întoarce din nou la semnificația semnelor numerice. De exemplu, proprietatea pe care o are 1 de a fi rezultatul înmulțirii sale cu el însuși ar fi un simplu mit, întrucît nici o cercetare la microscop sau chimică, oricît de departe ar fi dusă, nu ar putea detecta vreodată această proprietate în posesia acelui caracter nevinovat pe care îl numim numeralul unu. Se va spune că aceasta e o chestiune de definiție; însă nici o definiție nu este creatoare în sensul de a fi capabilă să confere unui lucru proprietăți pe care acesta nu le avea în prealabil, cu excepția unei singure proprietăți, și anume aceea de a exprima și semnifica ceva în virtutea definiției care introduce acest lucru ca semn*. Caracterele pe care noi le numim simboluri numerice au, pe de altă parte, proprietăți fizice și chimice care depind de mijloacele scrierii. Ne putem imagina că într-o bună zi vor apare simboluri numerice cu totul noi, așa cum de pildă cele arabe au luat locul celor romane. Nimeni nu își închipuie serios că în acest mod am obține numere cu totul noi, obiecte aritmetice cu totul noi, cu proprietăți care mai trebuie încă cercetate. Așadar, dacă trebuie să facem distincție între simbolurile numerice și semnificația acestora, vom fi obligați să recunoaștem că expresiile „2“, „1+1“, „3—1“, „6 : 3“ au aceeași semnificație; într-adevăr, este de neconceput în ce ar putea consta diferența între ele. Poate că se va replica: 1+1 este o sumă, în timp ce 6 : 3 este un cît. Dar ce este 6 : 3? Este numărul care înmulțit cu 3 dă rezultatul 6. Spunem „*numărul*“ și nu „un nu-

---

Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet, Leipzig, 1887)[8].

* Într-o definiție se pune întotdeauna problema asocierii unui sens sau a unei semnificații cu un semn. Acolo unde sensul și semnificația lipsesc cu totul nu putem vorbi propriu-zis nici despre un semn, nici despre o definiție.

măr"; folosind articolul hotărît, indicăm faptul că există un singur asemenea număr. Dar avem:

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6$$

și astfel (1+1) este tocmai numărul care fusese desemnat ca (6 : 3). Diferitele expresii corespund unor concepții și aspecte diferite dar, nu mai puțin, corespund întotdeauna unuia și aceluiași lucru[9]. Altfel, ecuația $x^2=4$ nu ar avea numai rădăcinile 2 și —2, ci ar avea și rădăcina (1+1), ca și nenumărate altele, toate diferite între ele, chiar dacă s-ar asemăna între ele într-o anumită privință. Acceptîndu-se numai două rădăcini reale, se respinge ideea că semnul egalității nu ar semnifica o coincidență completă, ci numai o concordanță parțială. Dacă acceptăm acest adevăr, vedem că expresiile:

„$2 \cdot 1^3 + 1$",
„$2 \cdot 2^3 + 2$",
„$2 \cdot 4^3 + 4$"

semnifică numere, respectiv 3, 18, 132. Or, dacă funcția ar fi într-adevăr numai semnificația unei expresii de calcul, ea ar fi tocmai un număr; dar prin aceasta aritmetica nu ar fi cîștigat nimic nou. După cum se știe însă, cei ce folosesc cuvîntul „funcție" au de obicei în vedere expresii în care un număr este numai indicat în mod indefinit prin litera x, de exemplu,

„$2 \cdot x^3 + x$";

dar aceasta nu schimbă nimic; într-adevăr, dacă este așa, nici această expresie nu indică un număr decît în mod indefinit, iar faptul că scriu această expresie sau pur și simplu scriu „x" nu are vreo însemnătate majoră.

Și totuși, notația care folosește „x" pentru a indica în mod indefinit ne conduce la concepția cea justă. Spunem că x este argument al funcției și recunoaștem în

„$2 \cdot 1^3 + 1$",
„$2 \cdot 4^3 + 4$",
„$2 \cdot 5^3 + 5$"

una şi aceeaşi funcţie, însă cu argumente diferite, respectiv cu 1, 4 şi 5. De aici, putem vedea că tocmai în ceea ce au comun aceste expresii rezidă esenţa specifică a funcţiei; cu alte cuvinte, esenţa ei rezidă în ceea ce mai conţine, în afară de „*x*" expresia

$$„2 \cdot x^3 + x",$$

adică în ceea ce s-ar mai putea scrie aproximativ astfel:

$$„2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)".$$

Ceea ce vreau să arăt este că argumentul nu face parte din funcţie însă contribuie împreună cu funcţia la constituirea unui întreg complet[10]; căci, funcţia prin ea însăşi trebuie caracterizată ca incompletă, ca cerînd o întregire, sau ca nesaturată. În această privinţă, funcţiile se deosebesc în mod fundamental de numere. Această esenţă a funcţiei explică de ce, pe de o parte, noi recunoaştem aceeaşi funcţie în „$2 \cdot 1^3+1$" şi „$2 \cdot 2^3+2$", deşi aceste două expresii semnifică numere diferite, în timp ce, pe de altă parte, noi nu recunoaştem una şi aceeaşî funcţie în „$2 \cdot 1^3+1$" şi „4—1", în pofida valorilor lor numerice egale. Mai mult, vedem acum cît de uşor se ajunge la considerarea formei expresiei ca element esenţial al funcţiei. Noi recunoaştem funcţia în expresie, reprezentîndu-ne pe aceasta din urmă ca scindată; posibilitatea unei asemenea scindări este sugerată de însăşi structura expresiei.

Cele două părţi în care se scindează astfel expresia matematică — semnul argumentului şi expresia funcţiei — nu sînt de aceeaşi natură; într-adevăr, argumentul este un număr, un întreg încheiat în sine, în timp ce funcţia nu este aşa. Am putea face o comparaţie cu divizarea unui segment de către un punct. În acel caz, noi înclinăm a îngloba punctul de diviziune în ambele segmente rezultate. Dar, dacă am vrea să facem o diviziune ireproşabilă, astfel încît să nu luăm ceva de două ori şi să nu omitem nimic, punctul de diviziune trebuie inclus în numai unul din segmentele rezultate. Acest segment devine ast-

fel absolut închis în el însuşi şi poate fi comparat cu argumentul, în timp ce celuilalt segment îi lipseşte ceva. Într-adevăr, punctul de diviziune, care s-ar putea numi şi extremitate a sa, nu-i aparţine. Numai întregindu-l cu această extremitate, sau cu un segment cu două extremităţi căpătăm, plecînd de la el, ceva complet. De exemplu, dacă spun „$2 \cdot x^3 + x$", x nu trebuie considerat ca făcînd parte din funcţie; această literă este menită să indice numai modul de întregire cerut, permiţîndu-ne să recunoaştem locurile unde trebuie să intre semnul argumentului[11].

Prin valoarea funcţiei pentru un argument dat înţelegem rezultatul întregirii funcţiei cu argumentul. Aşa de pildă, 3 este valoarea funcţiei $2 \cdot x^2 + x$ pentru argumentul 1, deoarece avem:

$$2 \cdot 1^2 + 1 = 3.$$

Există funcţii cum sînt $2 + x - x$ sau $2 + 0 . x$, a căror valoare este întotdeauna aceeaşi, oricare ar fi argumentul; avem $2 = 2 + x - x$ şi $2 = 2 + 0 \cdot x$. Dacă am considera că argumentul face parte din funcţie, am susţine că însuşi numărul 2 este această funcţie. Dar aceasta ar fi o greşeală. Chiar dacă în cazul de faţă valoarea funcţiei este întotdeauna 2, funcţia însăşi trebuie să fie totuşi distinsă de 2; într-adevăr, expresia unei funcţii va evidenţia întotdeauna unul sau mai multe locuri, destinate a fi umplute cu semnul argumentului.

Metoda geometriei analitice ne oferă un mijloc de reprezentare intuitivă a valorilor unei funcţii pentru diferite argumente. Dacă considerăm argumentul ca valoare numerică a unei abscise iar valoarea corespunzătoare a funcţiei ca valoare numerică a ordonatei unui punct, obţinem un ansamblu de puncte care se înfăţişează intuiţiei în cazurile obişnuite ca o curbă. Orice punct al curbei corespunde la un argument luat împreună cu valoarea asociată a funcţiei.

Aşa de pildă,

$$y = x^2 - 4x$$

dă o parabolă; aici, „y“ indică valoarea funcției, precum și valoarea numerică a ordonatei. iar „x“ indică în mod similar argumentul precum și valoarea numerică a abscisei. Comparînd cu ea funcția:

$$x(x - 4),$$

găsim că aceste funcții au întotdeauna aceeași valoare pentru același argument. Avem în general:

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

oricare ar fi numărul luat pentru x. În consecință, curba obținută din

$$y = x^2 - 4x$$

este identică cu cea provenită din

$$y = x(x - 4),$$

fapt pe care îl exprim după cum urmează: funcția $x(x—4)$ are același parcurs valoric ca funcția $x^2—4x$.

Dacă scriem

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

noi nu am identificat o funcție cu cealaltă, ci am identificat numai valorile uneia cu valorile celeilalte. Înțelegînd această identitate ca valabilă pentru orice argument substituibil în x, am exprimat astfel faptul că o identitate este valabilă în mod general. Dar noi putem spune de asemenea: „Parcursul valoric al funcției $x(x—4)$ este identic cu cel al funcției $x^2—4x$“, și aici avem o identitate între parcursuri valorice. Posibilitatea de a concepe însuși caracterul general al unei identități între valori ale funcțiilor ca o identitate, și anume ca identitate între parcursuri valorice este, după părerea mea, indemonstrabilă; ea trebuie considerată ca o lege fundamentală a logicii*.

* În numeroase expresii din terminologia matematică curentă, cuvîntul „funcție“ corespunde tocmai la ceea ce am numit aici parcurs valoric al unei funcții. Însă funcția, în accepția în care am folosit aici acest cuvînt, este anterioară din punct de vedere logic.

Putem introduce, în continuare, o notaţie succintă pentru parcursul valoric al unei funcţii. În acest scop, eu înlocuiesc semnul argumentului din cadrul expresiei unei funcţii prin semnul unei vocale din alfabetul elin, pun întreaga expresie între paranteze şi inserez în faţa ei aceeaşi literă greacă cu spirit lin. În felul acesta,

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$$

de pildă, reprezintă parcursul valoric al funcţiei $x^2 - 4x$, iar

$$\grave{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

parcursul valoric al funcţiei $x(x - 4)$, astfel încît

$$„\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])"$$

exprimă faptul că primul parcurs valoric este acelaşi cu al doilea. Au fost alese litere greceşti diferite cu scopul de a arăta că nimic nu ne obligă să adoptăm una şi aceeaşi literă[12].

Dacă înţelegem

$$„x^2 - 4x = x(x - 4)"$$

la fel ca mai sus, aceasta exprimă acelaşi sens, dar într-un mod diferit. Expresia prezintă sensul ca valabilitate generală a unei ecuaţii, în timp ce expresia introdusă ulterior este pur şi simplu o ecuaţie, iar partea dreaptă şi partea ei stîngă au o semnificaţie închisă în sine.

În

$$„x^2 - 4x = x(x - 4)",$$

membrul stîng considerat izolat indică un număr numai în mod indeterminat, iar acelaşi lucru este valabil pentru membrul drept. Dacă am fi avut pur şi simplu „$x^2 - 4x$", am fi putut scrie în locul său „$y^2 - 4y$", fără a schimba sensul; într-adevăr, „y", ca şi „x", indică un număr numai în mod indefinit. Dar dacă vom combina cele două părţi pentru a forma o ecuaţie, este obligatoriu să alegem una şi aceeaşi literă pentru a figura în ambele părţi şi astfel ceea ce exprimăm nu este conţinut numai în membrul stîng, sau numai în membrul drept, sau numai în semnul egalităţii şi anume exprimăm tocmai generalitatea; fireşte,

ea este generalitatea unei ecuații, dar mai întîi și întîi este o generalitate.

După cum noi indicăm un număr în mod indefinit printr-o literă, pentru a exprima generalitatea, tot astfel avem nevoie de a indica în mod indefinit, prin litere, o funcție. În acest scop se utilizează, de regulă, literele *f* și *F*, astfel încît în „$f(x)$" și „$F(x)$", x reprezintă argumentul. Aici, nevoia de întregire a funcției se exprimă prin faptul că litera *f* sau *F* este însoțită de paranteze; spațiul dintre paranteze este destinat să primească semnul pentru argument. Astfel,

$$„\dot{\varepsilon}f(\varepsilon)"$$

indică parcursul valoric al unei funcții care este lăsată nedeterminată.

Cum a fost însă extinsă semnificația cuvîntului „funcție" de-a lungul evoluției științei? Putem deosebi două direcții în care a avut loc această extindere.

În primul rînd, cîmpul operațiilor matematice aplicate în construirea funcțiilor a fost extins. Pe lîngă adunare, înmulțire, ridicare la putere și inversele lor, s-au introdus diversele procedee de trecere la limită; desigur, nu întotdeauna a existat conștiința clară a faptului că în acest fel se ajunge la ceva principial nou. S-a mers încă și mai departe, ba chiar a devenit necesar să apelăm la limbajul cotidian, deoarece limbajul simbolic al analizei era inoperant atunci cînd, de exemplu, se vorbea despre o funcție a cărei valoare este 1 pentru argumente raționale și 0 pentru argumente iraționale.

În al doilea rînd, cîmpul argumentelor și al valorilor posibile ale funcțiilor a fost extins prin admiterea numerelor complexe. Legat de aceasta, sensul expresiilor „sumă", „produs" etc. a trebuit, de asemenea, să fie determinat într-un mod mai larg.

În ambele direcții, eu merg încă și mai departe[13]. Eu încep prin a adăuga la semnele $+$, $-$, etc., care servesc la construirea unei expresii funcționale, semne cum sînt $=$, $>$, $<$, astfel că pot vorbi, de exemplu, despre funcția

$x^2 = 1$, unde x ocupă locul argumentului, ca şi înainte Prima problemă care se ridică aici este aceea a valorilor funcţiei pentru diferite argumente. Or, dacă îl înlocuim pe x prin -1, 0, 1, 2, în mod succesiv, obţinem:

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

Dintre aceste egalităţi, prima şi a treia sînt adevărate, iar celelalte sînt false. Spun acum: „valoarea funcţiei noastre este o valoare de adevăr" şi deosebesc între valoarea de adevăr a ceea ce este adevărat şi valoarea de adevăr a ceea ce este fals. Pe prima o numesc în mod succint Adevăratul, iar pe a doua Falsul[14]. În consecinţă, „$2^2 = 4$", de exemplu, desemnează Adevăratul, în timp ce „2^2" îl desemnează pe 4. La rîndul său, „$2^2 = 1$" desemnează Falsul. În consecinţă,

$$„2^2 = 4", „2 > 1", „2^4 = 4^2"$$

au aceeaşi semnificaţie, adică Adevăratul, astfel că

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

constituie o egalitate corectă.

Evident, se poate ridica obiecţia că „$2^2 = 4$" şi „$2 > 1$" sînt totuşi aserţiuni cu totul diferite, exprimă gînduri cu totul diferite; or, „$2^4 = 4^2$" şi „$4 \cdot 4 = 4^2$" exprimă de asemenea gînduri diferite, şi cu toate acestea noi putem înlocui „2^4" prin „$4 \cdot 4$", deoarece ambele semne au aceeaşi semnificaţie. În consecinţă, „$2^4 = 4^2$" şi „$4 \cdot 4 = 4^2$" au, la rîndul lor, aceeaşi semnificaţie. De aici reiese că din identitatea semnificaţiei nu urmează identitatea gîndului. Dacă spunem: „Luceafărul de seară este o planetă care are o perioad de revoluţie mai mică decît Pămîntul", gîndul pe care îl exprimăm este altul decît cel din propoziţia „Luceafărul de dimineaţă este o planetă care are o perioadă de revoluţie mai mică decît Pămîntul"; într-adevăr, un om care nu

știe că Luceafărul de dimineață este Luceafărul de seară ar putea considera una din propoziții adevărată iar pe cealaltă falsă. Nu mai puțin, ambele propoziții trebuie să aibă aceeași semnificație, căci una rezultă din cealaltă prin simpla înlocuire a cuvintelor „Luceafărul de seară" și „Luceafărul de dimineață", cuvinte care au aceeași semnificație, adică sînt nume proprii ale unuia și aceluiași corp ceresc. Trebuie să deosebim între sens și semnificație. „2^4" și „$4 \cdot 4$" au negreșit aceeași semnificație, adică sînt nume proprii ale aceluiași număr, însă nu au același sens; în consecință, „$2^4 = 4^2$" și „$4 \cdot 4 = 4^2$" au aceeași semnificație, însă nu același sens; în cazul de față, aceasta înseamnă că ele nu conțin același gînd*.

De aceea, tot așa cum scriem:

$$„2^4 = 4 \cdot 4",$$

putem scrie cu egală îndreptățire

$$„(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)"$$

și

$$„(2^2 = 4) = (2 > 1)"$$

Mai departe, ne putem întreba: ce ne face să includem semnele =, >, < în cîmpul semnelor care permit construirea unei expresii funcționale? În momentul de față, după cum se pare, cîștigă tot mai mult teren concepția după care aritmetica este o logică mai dezvoltată iar fundarea mai riguroasă a legilor aritmeticii le reduce la legi pur logice și numai la acestea. Eu însumi împărtășesc această părere și întemeiez pe baza ei cerința ca limbajul simbolic al aritmeticii să fie dezvoltat într-un

* Nu îmi scapă faptul că acest mod de expunere poate părea la prima vedere arbitrar și superficial și că ar fi de dorit să-mi susțin concepția printr-o analiză mai aprofundată. A se vedea studiul meu în curs de apariție „Über Sinn und Bedeutung" în „Zeitschrift für Philosophie und phil. Kritik".

simbolism logic. Va trebui acum să arătăm modul în care acest deziderat se realizează în cazul nostru.

Am văzut că valoarea funcţiei noastre $x^2 = 1$ este întotdeauna una din cele două valori de adevăr. Or, dacă pentru un argument determinat, de exemplu —1, valoarea funcţiei este Adevăratul, putem exprima aceasta după cum urmează: „numărul —1 are proprietatea că pătratul lui este 1"; ori, mai succint, „—1 este o rădăcină pătrată din 1", sau, de asemenea, „—1 cade sub conceptul de rădăcină pătrată din 1". Dacă valoarea funcţiei $x^2=1$ pentru un anumit argument, de exemplu pentru 2, este Falsul, putem exprima aceasta după cum urmează: „2 nu este o rădăcină pătrată a lui 1" sau „2 nu cade sub conceptul de rădăcină pătrată din 1". Vedem, deci, cît de strîns este legat ceea ce în logică se numeşte concept cu ceea ce noi numim funcţie. Într-adevăr, putem spune din capul locului: un concept este o funcţie a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr[15]. La rîndul ei, valoarea funcţiei

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

este întotdeauna o valoare de adevăr. Obţinem Adevăratul ca valoare a ei pentru argumentul —1, de exemplu, iar aceasta se mai poate exprima şi astfel: —1 este un număr mai mic cu o unitate decît un număr al cărui pătrat este egal cu dublul său. Aceasta exprimă faptul că —1 cade sub un concept. Dar funcţiile

$$x^2 = 1 \text{ şi } (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

au întotdeauna aceeaşi valoare pentru acelaşi argument, adică Adevăratul pentru argumentele —1 şi +1, şi Falsul pentru toate celelalte argumente. Potrivit convenţiilor adoptate anterior, vom spune de asemenea că aceste funcţii au acelaşi parcurs valoric şi vom exprima aceasta în simboluri după cum urmează:

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}([\alpha + 1]^2 = 2[\alpha + 1]).$$

În logică, aceasta se numeşte identitate a extensiunii conceptelor. Ca atare, putem desemna ca extensiune a unui

concept parcursul valoric al unei funcții a cărei valoare pentru orice argument este o valoare de adevăr[16].

Nu ne vom opri la ecuații și inegalități[17]. Forma lingvistică a ecuațiilor este o propoziție declarativă. O propoziție conține — sau cel puțin pretinde a conține — ca sens al ei un gînd; acest gînd este în general adevărat sau fals; cu alte cuvinte, el are în general o valoare de adevăr care trebuie privită de asemenea ca semnificație a propoziției, tot așa cum, de pildă, numărul 4 este semnificația expresiei „2+2", sau cum Londra este semnificația expresiei „capitala Angliei".

Propozițiile declarative în general, ca și ecuațiile sau expresiile analitice se pot gîndi ca fiind scindate în două părți; o parte completă în ea însăși și o alta care necesită o întregire, sau care este, ca să spunem așa, „nesaturată". De exemplu, putem scinda propoziția

„Caesar a cucerit Gallia"

în „Caesar" și „a cucerit Gallia". A doua parte este „nesaturată", poartă cu sine un loc liber și abia cînd acest loc este umplut cu un nume propriu sau cu o expresie care ține locul unui nume propriu apare un sens complet. Aici, de asemenea, numesc „funcție" ceea ce semnifică această parte nesaturată. În cazul de față, argumentul este Caesar.

După cum vedem, aici am întreprins o extindere în cealaltă direcție, adică relativ la ceea ce poate figura în calitate de argument. Acum se pot admite nu numai numere, ci și obiecte în general — persoanele fiind considerate și ele, de bună seamă, drept obiecte. Cele două valori de adevăr au fost deja introduse ca valori posibile ale unei funcții. Va trebui să mergem mai departe și să admitem fără restricție obiecte ca valori ale funcțiilor. Pentru a obține un exemplu în acest sens, să plecăm, de exemplu, de la expresia

„capitala pe care o are Imperiul german"

Această expresie ţine în mod evident locul unui nume propriu şi semnifică un obiect. Să scindăm expresia în părţile

„capitala pe care o are" şi „Imperiul german";

prima parte este „nesaturată", în timp ce cealaltă parte este completă în sine. Conform celor spuse anterior,

„capitala pe care o are"

o numesc expresie a unei funcţii. Dacă luăm Imperiul german ca argument, căpătăm Berlin ca valoare a funcţiei[18].

Admiţînd fără nici o restricţie obiecte ca argumente şi valori de funcţii, problema care se pune acum este ce anume numim aici obiect. Consider că o definiţie şcolară este imposibilă, deoarece aici avem ceva prea simplu pentru a mai admite o analiză logică. Tot ce putem face este să indicăm ce se are în vedere[19]. În cele de faţă putem numai să spunem în mod succint: Un obiect este tot ce nu este funcţie, astfel că expresia sa nu conţine nici un loc liber[20].

O propoziţie declarativă nu conţine nici un loc liber şi ca atare semnificaţia ei trebuie considerată ca obiect. Această semnificaţie este însă o valoare de adevăr. Aşadar, cele două valori de adevăr sînt obiecte[21].

Mai sus, am prezentat egalităţi între parcursuri valorice, de exemplu:

$$„\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha[\alpha - 4])".$$

Putem efectua aici o scindare în „$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$" şi „$( ) = \grave{\alpha}(\alpha[\alpha - 4])$".

Această a doua parte cere o întregire, întrucît la stînga semnului „egal" ea conţine un loc liber. Prima parte, „$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$" este absolut închisă în sine, ea semnificînd deci un obiect. Parcursurile valorice ale funcţiilor sînt obiecte, în timp ce funcţiile însele nu sînt obiecte. Am folosit şi pentru „$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 1)$" denumirea de parcurs valoric, dar am fi putut s-o numim şi extensiunea conceptului de rădă-

cină pătrată din 1. Extensiunile conceptelor sînt, de asemenea, obiecte, deși conceptele însele **nu** sînt obiecte.

După ce am extins astfel cîmpul lucrurilor care pot fi luate ca argumente va trebui să stabilim cu mai multă precizie semnificațiile semnelor intrate în uz. Atîta timp cît considerăm că singurele obiecte din aritmetică sînt numerele întregi, literele *a* și *b* în „*a*+*b*" vor indica numai numere întregi, iar semnul plus va trebui definit numai ca aplicat la numere întregi. Orice extindere a domeniului din care fac parte obiectele indicate prin „*a*" și „*b*" ne obligă să dăm o nouă definiție a semnului plus. Rigoarea științifică pare să impună luarea unor măsuri care să excludă posibilitatea ca în unele cazuri o expresie să nu aibă semnificație, să excludă posibilitatea de a opera, fără să ne dăm seama, cu semne vide, iluzionîndu-ne că avem de-a face cu obiecte. În trecut, am avut experiențe negative în tratarea șirurilor infinite divergente. Așadar, este necesar să stipulăm reguli din care să decurgă, de exemplu, ce semnifică

$$„\odot + 1",$$

în cazul cînd „$\odot$" ar semnifica soarele. Conținutul stipulărilor este relativ indiferent; important este însă ca ele să fie făcute, astfel încît „*a* + *b*" să aibă întotdeauna o semnificație, oricare ar fi semnele obiectelor determinate, pe care le punem in locul lui „*a*" și „*b*". În ceea ce privește conceptele, se cere ca pentru orice argument să avem o valoare de adevăr ca valoare a lor și ca pentru orice obiect să se poată determina dacă el cade sau nu sub concept[22]. Cu alte cuvinte, în cazul conceptelor, se ridică cerința delimitării lor precise; dacă această cerință nu ar fi satisfăcută, stabilirea unor legi logice despre concepte ar fi imposibilă. Pentru orice argument x pentru care „$x + 1$" ar fi lipsit de semnificație, funcția $x + 1 = 10$ nu ar avea nici ea o valoare, și deci nu ar avea vreo valoare de adevăr, astfel că conceptul:

„ceea ce dă 10 atunci cînd este mărit cu 1"

nu ar avea granițe precise. Cerința delimitării riguroase a conceptelor antrenează cerința ca funcțiile în general să aibă o valoare pentru orice argument.

Pînă acum am considerat valorile de adevăr numai ca valori ale funcțiilor, nu ca argumente. Potrivit celor spuse mai sus, o funcție trebuie să capete o valoare și în cazul cînd luăm o valoare de adevăr ca argument; în ceea ce privește semnele intrate deja în uz, singurul lucru important pentru o regulă îndreptată în acest sens este, de cele mai multe ori, faptul că ea există, iar conținutul ei concret nu intră prea mult în joc. Dar acum trebuie să ne ocupăm de unele funcții care ne interesează tocmai atunci cînd argumentul lor este o valoare de adevăr[23].

Voi introduce ca funcție de acest gen

$$——x,$$

stipulînd că valoarea acestei funcții va fi Adevăratul, dacă este luat ca argument Adevăratul și că în toate celelalte cazuri valoarea acestei funcții este Falsul, așadar atît atunci cînd argumentul este Falsul, cît și atunci cînd argumentul nu este o valoare de adevăr. Prin urmare, ca să dăm un exemplu,

$$——1 + 3 = 4$$

este Adevăratul, în timp ce atît

$$——1 + 3 = 5$$

cît și

$$——4$$

sînt Falsul. Așadar, această funcție are ca valoare a ei însuși argumentul, atunci cînd acesta din urmă este o valoare de adevăr. În trecut, eu numeam această linie orizontală linia conținutului — denumire care nu mi se mai pare adecvată. Acum o voi numi pur și simplu orizontala.

Cînd scriem o ecuație sau o inegalitate, de exemplu $5>4$, de obicei noi vrem să exprimăm în același timp o

judecată; în exemplul nostru, vrem să asertăm faptul că 5 este mai mare ca 4. Conform concepției pe care o înfățișez aici, „5>4" și „1+3=5" ne oferă tocmai expresii pentru valori de adevăr, fără a se face astfel vreo aserțiune. Această separare a actului judecării de materia judecății pare indispensabilă, deoarece în caz contrar nu am putea exprima o simplă supoziție — înfățișarea unui caz — fără a judeca simultan dacă el are loc sau nu. Așadar, avem nevoie de un semn special pentru a fi în măsură a aserta ceva. În acest scop, eu folosesc o linie verticală în capătul din stînga al orizontalei, așa că, de exemplu, scriind

$$„\vdash 2 + 3 = 5"$$

noi asertăm[24] că 2+3 este egal cu 5. Așadar, aici nu scriem numai o valoare de adevăr, ca în

$$„2 + 3 = 5"$$

ci în același timp mai afirmăm că această valoare este Adevăratul*.

Cea mai simplă funcție care urmează ar putea fi aceea a cărei valoare este Falsul pentru exact acele argumente pentru care valoarea lui ——x este Adevăratul și invers, este Adevăratul pentru argumentele pentru care valoarea lui ——x este Falsul. Eu o voi nota astfel:

$$\top x,$$

și voi numi aici liniuța verticală linia negației. Înțeleg această funcție ca avînd argumentul ——x:

$$(\top x) = (\top [\text{——} x]),$$

* Semnul asertării nu poate fi folosit spre a construi o expresie funcțională, deoarece el nu servește, conjugat cu alte semne, la desemnarea unui obiect „$\vdash$ 2+3=5" nu desemnează nimic; el asertează ceva.

imaginîndu-mi totodată că cele două linii orizontale se confundă. Dar avem de asemenea:

$$(\text{———}[\top x]) = (\top x)$$ [25],

deoarece valoarea lui $\top x$ este întotdeauna o valoare de adevăr. De asemenea, în „$\top x$" voi înţelege ambele linii, din dreapta şi din stînga liniei negaţiei, ca orizontale, în sensul în care am definit anterior acest cuvînt. Ca atare,

$$„\top 2^2 = 5"$$

de exemplu, semnifică Adevăratul, şi putem adăuga semnul asertării:

$$\vdash\!\top\; 2^2 = 5;$$

prin aceasta asertăm că $2^2 = 5$ nu este Adevăratul, sau că 2^2 nu este 5. Dar, totodată,

$$\top 2$$

este Adevăratul, întrucît ——2 este Falsul:

$$\vdash\!\top\; 2,$$

adică 2 nu este Adevăratul.

Modul în care prezint generalitatea va reieşi cel mai bine dintr-un exemplu. Să presupunem că trebuie să exprimăm faptul că orice obiect este identic cu el însuşi. În

$$x = x$$

avem o funcţie al cărei argument este indicat de „x". Trebuie să spunem acum că valoarea acestei funcţii este în-

totdeauna Adevăratul, orice am lua ca argument. Eu înțeleg semnul

$$„\;—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, f(\mathfrak{a})\text{“}$$ [26]

ca însemnînd Adevăratul atunci cînd funcția $f(x)$ are întotdeauna Adevăratul ca valoare a sa, pentru orice argument; în toate celelalte cazuri

$$„\;—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, f(\mathfrak{a})\text{“}$$

trebuie să semnifice Falsul. Pentru funcția noastră $x = x$ avem primul caz. Așadar,

$$—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

este Adevăratul; vom scrie aceasta după cum urmează:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$ [27]

Liniile orizontale de la dreapta și stînga concavității trebuie considerate ca orizontale în sensul nostru. În locul lui „$\mathfrak{a}$“ ar putea fi aleasă orice altă literă gotică; excepție fac cele care trebuie să servească drept litere pentru o funcție, ca de pildă $\mathfrak{f}$ și $\mathfrak{F}$.

Această notație permite întotdeauna negarea generalității, ca în

$$—\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, \mathfrak{a}^2 = 1$$ [28].

Se constată că $—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, \mathfrak{a}^2 = 1$ este Falsul, fiindcă nu pentru orice argument valoarea funcției $x^2 = 1$ este Adevăratul. De exemplu, pentru argumentul 2 obținem $2^2 = 1$, ceea ce este Falsul. Acum, dacă $—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!—\, \mathfrak{a}^2 = 1$ este Fal-

sul, atunci $\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\!-\; \mathfrak{a}^2 = 1$ este Adevăratul, conform regulii de mai sus pentru linia negației. Așadar, avem

$$\vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\; \mathfrak{a}^2 = 1$$

adică „nu orice obiect este rădăcină pătrată din 1“, sau „există obiecte care nu sînt rădăcini pătrate din 1“.

Putem oare exprima și faptul că nu există rădăcini pătrate din 1? Fără îndoială: nu avem decît să luăm, în locul funcției $x^2 = 1$, funcția

$$\top\, x^2 = 1.$$

Contopind orizontalele în

$$„\!-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\quad \top\, \mathfrak{a}^2 = 1"$$

noi obținem[29]

$$„\!-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\!-\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1“$$

Aceasta desemnează Falsul, deoarece nu orice argumente fac ca valoarea funcției

$$\top\, x^2 = 1$$

să fie Adevăratul. De exemplu:

$$\top\, 1^2 = 1$$

este Falsul, deoarece $1^2 = 1$ este Adevăratul. Dat fiind că

$$-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\!-\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

este deci Falsul,

$$-\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

este Adevăratul:[30]

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- \mathfrak{a}^2=1;$$

cu alte cuvinte, „nu pentru orice argument, valoarea funcției

$$\top\, x^2 = 1$$

este Adevăratul", sau „nu pentru orice argument valoarea funcției $x^2=1$ este Falsul", sau „există cel puțin o rădăcină pătrată din 1".

La acest punct, se pot da cîteva exemple în simboluri și cuvinte:

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- \mathfrak{a} \geqq 0,$$

există cel puțin un număr pozitiv[31];

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- \mathfrak{a} < 0,$$

există cel puțin un număr negativ[32];

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0$$ [33],

există cel puțin o rădăcină a ecuației

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

Pornind de aici se întrevede modul în care se exprimă propozițiile existențiale, care sînt atît de importante. Dacă folosim litera funcțională f ca o indicație indefinită a unui concept, atunci

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- f(\mathfrak{a})$$

ne oferă forma care înglobează ultimele exemple, abstracţie făcînd de semnul asertării[34]. Expresiile

$$„\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1", \qquad „\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} \geq 0",$$

$$„\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} < 0", \qquad \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0"$$ [35]

provin din această formă într-un mod analog celui in care din x^2 provin „*1*²", „*2*²", „*3*²". Dar tot aşa cum în x^2 avem o funcţie al cărei argument este indicat de „*x*", la fel eu înţeleg

$$„\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, f(\mathfrak{a})"$$

ca expresie a unei funcţii al cărei argument este indicat de „*f*". O asemenea funcţie, evident, diferă fundamental de funcţiile considerate pînă acum, deoarece argument al ei poate fi numai o funcţie. Însă, aşa cum funcţiile diferă în mod fundamental de obiecte, tot astfel funcţiile ale căror argumente sînt şi trebuie să fie funcţii diferă în mod fundamental de funcţiile ale căror argumente sînt obiecte şi nu pot fi nimic altceva. Pe acestea din urmă le numesc funcţii de treapta unu iar pe primele funcţii de treapta doi. În acelaşi mod, eu disting între concepte de treapta unu şi concepte de treapta doi*. Funcţii de treapta doi au fost efectiv folosite încă de mult în analiză; un exemplu îl constituie integrala definită (considerînd ca argument funcţia care trebuie integrată).

---

* Cf. lucrarea mea *Fundamentele aritmeticii [Grundlagen der Arithmetik]*, Breslau, 1884. Am folosit acolo termenul „ordinul doi", în loc de „treapta doi". Demonstraţia ontologică a existenţei lui Dumnezeu este afectată de eroarea tratării existenţei ca un concept de treapta unu.

Să spunem ceva şi despre funcţiile cu două argumente. Noi căpătăm expresia unei funcţii prin scindarea semnului complex al unui obiect într-o parte saturată şi una nesaturată. Astfel, noi scindăm semnul Adevăratului

$$„3 > 2"$$

în „3" şi „$x > 2$". Putem scinda, mai departe, partea nesaturată „$x > 2$" în acelaşi mod, în „2" şi

$$„x > y",$$

unde „y" ne face cunoscut locul gol ocupat înainte de „2". În

$$x > y$$

noi avem o funcţie cu două argumente, unul indicat de „x" iar celălalt de „y", iar în

$$3 > 2$$

noi avem valoarea acestei funcţii pentru argumentele 3 şi 2. Avem în cazul de faţă o funcţie a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr. Am numit concepte astfel de funcţii de un argument; numim relaţii atare funcţii de două argumente. De exemplu, avem de asemenea relaţii în

$$x^2 + y^2 = 9$$

şi în

$$x^2 + y^2 > 9,$$

în timp ce funcţia

$$x^2 + y^2$$

are ca valori numere. Ca atare, pe aceasta din urmă nu o vom numi relaţie.

În acest moment, putem introduce o funcţie care nu este specifică aritmeticii.

Valoarea funcţiei



va fi Falsul dacă luăm Adevăratul în calitate de argument y şi în acelaşi timp luăm un obiect care nu este Adevăratul în calitate de argument x; în toate celelalte cazuri, valoarea funcţiei va fi Adevăratul. Linia orizontală inferioară şi cele două segmente în care verticala împarte orizontala superioară trebuie privite ca orizontale. Ca atare, putem considera întotdeauna ca argumente ale funcţiei noastre —— x şi —— y, adică valori de adevăr[36].

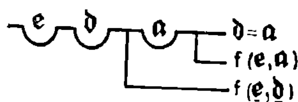
Printre funcţiile de un argument, am distins între funcţii de treapta unu şi funcţii de treapta doi. Acum devine posibilă o mai mare varietate. O funcţie de două argumente poate cere argumente de aceeaşi treaptă, sau de trepte diferite; avem funcţii de treaptă omogenă şi de treaptă neomogenă. Un exemplu de funcţie de treaptă neomogenă este cîtul diferenţial, dacă luăm ca argumente funcţia care trebuie diferenţiată şi argumentul după care trebuie diferenţiată; un alt exemplu este integrala definită, dacă luăm ca argumente funcţia care trebuie integrată şi limita superioară. Funcţiile de treaptă uniformă se pot împărţi la rîndul lor în funcţii de treapta unu şi funcţii de treapta doi. Un exemplu de funcţie de treapta doi este

$$F(f[1]),$$

unde „F“ şi „f“ indică argumentele.

În privinţa funcţiilor de treapta doi de un singur argument, noi trebuie să facem o distincţie, după cum rolul acestui argument poate fi jucat de o funcţie [redacted] de un argument sau de o funcţie de două argumente; într-adevăr, o funcţie de un argument este atît de diferită în esenţă de o funcţie de două argumente, încît una nu poate figura ca argument în acelaşi loc ca cealaltă. Unele funcţii

de treapta doi de un argument reclamă ca acest argument să fie o funcție de un argument, în timp ce altele reclamă o funcție de două argumente; aceste două clase sînt riguros delimitate.



este un exemplu de funcție de treapta doi de un argument, funcție care cere ca acest argument să fie o funcție de două argumente[37]. Litera *f* indică aici argumentul, iar cele două locuri, separate de virgulă, dinăuntrul parantezelor care urmează lui „*f*" permit să se constate că *f* reprezintă o funcție de două argumente.

În cazul funcțiilor de două argumente, varietatea este încă și mai mare.

Dacă aruncăm de aici o privire retrospectivă asupra dezvoltării aritmeticii, constatăm o ascensiune din treaptă în treaptă. Mai întîi calculele se făceau cu numere individuale, cu 1, cu 3, etc.;

$$2 + 3 = 5,\ 2 \cdot 3 = 6,$$

sînt teoreme de acest gen. Apoi s-a progresat la legi mai generale, valabile pentru toate numerele. În mod corespunzător, pe planul notației s-a trecut la operarea cu litere.

O teoremă de acest gen este

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

În această fază, s-a ajuns pînă la tratarea funcțiilor individuale, dar cuvîntul nu era încă folosit în sensul său matematic, iar semnificația sa nu fusese încă sesizată. Treapta imediat următoare a constituit-o recunoașterea unor legi generale ale funcțiilor, însoțite de făurirea termenului tehnic „funcție". În cadrul simbolismului, la aceasta corespunde introducerea unor litere ca *f*, *F* pen-

tru a indica în mod indefinit funcții. O teoremă de acest gen este[38]

$$\frac{\mathrm{d}f(x) \cdot F(x)}{\mathrm{d}x} \quad F(x) \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Ajunși la acest punct, oamenii aveau funcții particulare de treapta doi, fără a avea însă ideea a ceea ce am numit funcție de treapta doi. Prin elaborarea acestei idei înregistrăm următorul pas înainte. Se poate crede că procesul va continua. Probabil însă că pasul următor nu mai este atît de bogat în consecințe ca cele anterioare; într-adevăr, în locul funcțiilor de treapta doi se pot considera, în cadrul dezvoltărilor ulterioare, funcții de treapta unu — așa cum se va arăta în altă parte. Dar această circumstanță nu înlătură distincția dintre funcțiile de treapta unu și funcțiile de treapta doi, distincție care nu este arbitrară, ci adînc înrădăcinată în natura lucrurilor[39].

De asemenea, în locul funcțiilor de două argumente, putem opera cu funcții de un singur argument, însă un argument complex; dar distincția între funcțiile de un argument și funcțiile de două argumente continuă să subziste la fel de riguros.

NOTE

[1] La 10/24 ianuarie 1879, Frege a prezentat în ședința Societății de medicină și științele naturii din Jena comunicarea „Anwendungen der Begriffsschrift" (Aplicații ale Scrierii conceptuale); aceasta a fost tipărită în „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft", *13*, 1879, pp. 29—33. Aplicațiile scrierii conceptuale, la care se referă titlul comunicării, constau în formalizarea unor propoziții aritmetice și geometrice. Frege ia cîteva propoziții matematice și pune în evidență formulele corespunzătoare în notația lui.

La 24 ianuarie 1882, Frege a comunicat în fața Societății din Jena articolul „Über den Zweck der Begriffsschrift" (Cu privire la scopul Scrierii conceptuale). Răspunzînd observațiilor critice formulate de către E. Schröder în recenzia sa la *Begriffsschrift*, Frege preciza deosebirea principială dintre limbajul logicii lui Boole și propriul său limbaj al formulelor, spre a sublinia apoi că notația sa — pe baza unei analize mai fine a propozițiilor — permite formalizarea unor propoziții matematice inabordabile cu mijloacele logicii lui Boole. În afară de aceasta, *Scrierea conceptuală* merge mai departe decît o logică abstractă cum este limbajul algebric al lui Boole, fiind expresia unui conținut: „ceea ce am vrut să creez nu este doar un *calculus ratiocinator* — scria autorul —, ci o *lingua characteristica* în sensul lui Leibniz. Procedînd astfel, eu recunosc totuși că o parte necesară a Scrierii conceptuale este calculul deductiv. Dacă lucrul acesta nu a fost înțeles, s-ar putea ca motivul să fie acela că am pus prea mult pe primul plan aspectul logic abstract". Frege avea în vedere, desigur, acea fuziune organică a logicii cu matematica pe care analiza sa logică și definițiile unor noțiuni matematice în termeni pur logici păreau s-o îngăduie.

[2] „Metoda generală a diferențierii și integrării — scrie un istoric al matematicii — construită cu deplina înțelegere a faptului că un proces este inversul celuilalt a putut fi descoperită numai de oameni care stăpîneau atît metoda geometrică a gre-

cilor şi a lui Cavalieri, cît şi metoda algebrică a lui Descartes şi Wallis. Asemenea oameni nu s-au putut ivi decît după 1660 şi ei au apărut într-adevăr în persoana lui Newton şi Leibniz. S-a scris foarte mult despre problema priorităţii acestei descoperiri, dar astăzi este stabilit că amîndoi au descoperit în mod independent metodele lor. Newton a descoperit primul analiza (în 1665—1666), Leibniz în 1673—1676, dar Leibniz a fost primul care a publicat în acest domeniu (Leibniz în 1684—1686, Newton în 1704—1736 (postum). Şcoala lui Leibniz a fost mult mai strălucită, în comparaţie cu şcoala lui Newton" (Dirk J. Struik, *Abriss der Geschichte der Mathematik*, Berlin, 1963, p. 118).

Conceptul de funcţie a fost abstras treptat în cursul veacului al XVII-lea din studiul naturii, în special din studiul mişcării. Termenul „funcţie" a fost introdus, se pare, de către Leibniz, căruia îi aparţine şi paternitatea termenilor „constantă", „variabilă" ca şi aceea a notaţiilor uzitate pînă astăzi pentru funcţii în general şi pentru funcţiile analizei în mod deosebit. Cf., de exemplu, Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, în special pp. 338—340, 403—406, 505—507. Evoluţia conceptului de funcţie a fost schiţată de matematicianul german Hermann Hankel într-o expunere pe care cititorul român o poate consulta în: Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, Editura Ştiinţifică, 1968, pp. 248—253.

[3] O asemenea lege este menţionată de către Frege spre finele articolului de faţă (vezi nota 37).

[4] A rămas astfel celebră definiţia pe care marele Euler o dă în *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748); *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* (O funcţie de o cantitate variabilă este o expresie analitică compusă într-un mod arbitrar din acea cantitate variabilă, precum şi din numere sau cantităţi constante). Definiţia, pe care o reproducem *apud* Hankel (în: Oskar Becker, *op. cit.*, p. 249) defineşte funcţia ca o *expresie* şi anume una *analitică*. Hankel comentează: „Prin «expresie analitică», a cărei semnificaţie Euler nu socoteşte necesar să o determine mai de aproape, nu trebuie să înţelegem altceva decît o dependenţă a mărimilor, formată după tipul func-

ţiilor algebrice... Sprijinindu-se mereu pe acel model al funcţiilor algebrice, toate proprietăţile generale observate la funcţiile algebrice, continuitatea lor specială, singularităţile lor, modul lor particular de a deveni discontinue sau infinite, au fost transpuse imediat la toate funcţiile" (*ibid.*). Să reţinem din acest pasaj atît obîrşia algebrică a noţiunii de funcţie cît şi confuzia pe care Frege o va denunţa cîteva rînduri mai jos, între expresia funcţiei şi funcţia ca atare. Hankel însuşi trece cu dezinvoltură de la caracterizarea funcţiei ca expresie la caracterizarea în termeni de „dependenţă a mărimilor".

[5] Distincţia dintre semn şi ceea ce acesta desemnează este înţeleasă de Frege ca o distincţie între formă şi conţinut; prin conţinut se are în vedere *semnificaţia* expresiei, prin formă, expresia ca atare. Cîteva propoziţii mai încolo, se vorbeşte despre „simpla expresie" ca despre „forma unui conţinut". De aici nu mai este departe pînă la sugestia că structura expresiei este (imită, redă) structura a ceea ce expresia semnifică. Motivul va reveni in expunerea lui Frege cu o precizie sporită: structura expresiei nu desemnează dar sugerează cumva proprietăţile structurale ale conţinuturilor vizate. În speţă, caracterul incomplet, nesaturat al expresiei funcţionale redă un caracter al funcţiei însăşi. A se vedea şi nota 7.

[6] Frege are în vedere comunicarea sa „Über formale Theorien der Arithmetik", în care supune unei critici severe conceperea aritmeticii ca „teorie formală" — formală, in înţelesul că ar avea ca obiecte semne lipsite de orice conţinut, semne ale căror proprietăţi ar fi conferite prin intermediul unor definiţii.

[7] Două expresii avînd acelaşi conţinut, adică desemnînd un acelaşi lucru, vor diferi numai prin forma lor. De unde, prin abuz de limbaj, se ajunge la caracterizarea expresiilor însele ca forme.

[8] Numărul nu este perceptibil în mod senzorial, spre deosebire de semnul său; Helmholtz şi Kronecker le identificau însă.

Herman v. Helmholtz (1821—1894), fizician, psiholog şi epistemolog de vază, a dezvoltat o concepţie emipiristă pe care şi-o caracteriza astfel: „Eu privesc aritmetica sau teoria numerelor pure ca o metodă edificată pe fapte pur psihologice, care ne instruieşte asupra aplicării corecte a unui sistem de simboluri

(şi anume, sistemul numerelor) de o întindere nelimitată şi cu o posibilitate nelimitată de rafinare". Reproducînd acest citat, Frege (în *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, pp. 139—140) îl comentează: „Aici, de asemenea, semnele capătă o forţă magică, întrucît semnificaţiile lor sînt scăpate din vedere. Pe deasupra sînt puse în joc psihologia şi empiria, ceea ce nu face decît să accentueze lipsa de claritate...".

Leopold Kronecker (1823—1891), matematician preintuiţionist, a preconizat aritmetizarea întregii matematici, adică reducerea conceptelor analizei la concepte aritmetice, în ultimă instanţă la conceptul de număr întreg, respingînd fundamentarea analizei pe definiţia numerelor iraţionale. Frege discută articolul lui Kronecker, „Despre conceptul de număr", în *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, criticînd în primul rînd identificarea numărului întreg cu simbolul numeric: „Teoria numerelor întregi a lui Kronecker este, dealtfel, intenabilă. După dînsul, un număr întreg ar fi o totalitate de simboluri numerice. Aceasta conduce la consecinţa absurdă că un popor care foloseşte alte simboluri numerice ar avea totodată alte numere întregi şi că, aşadar, aritmetica acestuia ar trata cu totul alte obiecte decît cele ale noastre, constituind deci o cu totul altă ştiinţă. Mai departe, am avea o multitudine finită de numere întregi, dat fiind că, în mod evident, pînă în prezent a fost etalată numai o multitudine finită de simboluri numerice iar din acestea se pot constitui numai un număr finit de totalităţi" (*op. cit.*, p. 155).

[9] Distincţia va fi dezvoltată pe larg în „Despre sens şi semnificaţie". Expresiile diferite cărora le corespund unul şi acelaşi lucru au sensuri diferite, dar au aceeaşi semnificaţie sau referinţă.

[10] Acest întreg este valoarea funcţiei pentru argumentul considerat; cele trei expresii de mai sus, care desemnau numerele 3, 18, 132 le desemnau în calitate de valori ale uneia şi aceleiaşi funcţii, exprimată prin „$2\cdot(\ )^3+(\ )$". Expresia care desemnează funcţia este o „parte" a expresiei care desemnează valoarea funcţiei. Separarea şi prezentarea ei în mod autonom presupun mai mult decît o descompunere a expresiei în componente, presupun, anume, compararea mai multor expresii (care desemnează valori

ale aceleiaşi funcţii pentru argumente diferite) în scopul *abstragerii* elementului lor comun.

[11] Semnul argumentului nu este parte a semnului funcţiei, însă *locul* pentru semnul argumentului *este* o parte a semnului funcţiei.

[12] Să observăm că ideea de *parcurs valoric* al funcţiei de un argument este introdusă prin intermediul unei definiţii contextuale, apelînd în mod esenţial la semnul identităţii. Frege a început prin a explica ce înseamnă că două funcţii de un argument au acelaşi parcurs valoric, apoi a introdus notaţia pentru parcursul valoric. Noţiunea de *parcurs valoric* precizează şi generalizează ideea de *grafic* al unei funcţii, adică de corespondenţă stabilită între argumentele şi valorile funcţiei. În dezvoltările contemporane, noţiunea de *parcurs valoric* corespunde ideii de *graf* al funcţiei: clasa tuturor perechilor ordonate al cărui prim element este argumentul funcţiei, iar al doilea element valoarea funcţiei pentru acel argument. Pentru funcţii de n argumente, graful funcţiei se defineşte ca mulţimea tuturor şirurilor ordonate avînd $n+1$ elemente, în care primele n sînt posibilele argumente ale funcţiei iar ultimul este valoarea luată de funcţie pentru un şir determinat de n argumente. Funcţia însăşi este definită (în cazul funcţiei de un singur argument) printr-un triplet de forma (A, B, Γ), unde A este mulţimea din care funcţia ia argumente, B este mulţimea din care funcţia ia valori iar Γ este graful funcţiei. A este *mulţimea de plecare* a funcţiei, B este *mulţimea de sosire*, iar Γ este submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Aceste precizări scot la lumină atît similitudinile cît şi deosebirile ce există între abordarea fregeană şi abordarea pe baza teoriei mulţimilor. Ultima abordare este extensională, în sensul că dacă două funcţii se definesc prin intermediul unuia şi aceluiaşi triplet (A, B, Γ), ele sînt identice. Pentru Frege însă, deşi aceste funcţii au *acelaşi parcurs valoric*, ele însele rămîn totuşi distincte, în cazul cînd expresiile care le desemnează au *sensuri distincte.*

Mai există şi o altă deosebire esenţială, care ne avertizează împotriva identificării parcursului valoric cu graful funcţiei. Dacă luăm, de exemplu, funcţiile de treapta întîi (a se vedea mai jos), pentru Frege aceste funcţii sînt peste tot definite pe domeniul

universal al obiectelor. Această presupunere, combinată cu ceea ce Frege a numit mai sus o lege logică fundamentală, a condus la paradoxul lui Russell.

[13] Pînă acum, Frege a precizat noţiunea de funcţie din matematică. În continuare, el prezintă extinderea conceptului de funcţie în domeniul logicii.

[14] Frege înţelege propoziţiile de identitate (egalităţile) ca desemnînd valoarea unei funcţii de două argumente pentru un cuplu de argumente. Această valoare este o *valoare de adevăr*. Valorile de adevăr sînt Adevăratul şi Falsul. În loc de „adevărat" se spune astăzi în mod curent „adevărul". Am tradus fidel „das Wahre" al lui Frege prin „Adevăratul". Această nuanţă nu prezintă totuşi o însemnătate deosebită; important este să înţelegem că aici „Adevăratul" este folosit ca substantiv, mai exact ca nume propriu al unui obiect abstract.

Funcţiile care iau ca valori valorile de adevăr şi astfel încît aplicarea semnului lor la semnele argumentelor lor dă o propoziţie avînd ca valoare de adevăr tocmai respectiva valoare a funcţiei se numesc astăzi, îndeobşte, *funcţii propoziţionale*. Expresia funcţiei propoziţionale este o *formă propoziţională*. *Forma propoziţională* redă alcătuirea propoziţiei din părţi componente, prin aplicarea unor operaţii funcţionale. Aşadar, noţiunea de *formalizare* îşi găseşte o explicaţie precisă în logica matematică pe baza noţiunii de *funcţie logică*. A se vedea A. Church, *Introducere în logica matematică*, în volumul *Logică şi filozofie*, Ed. Politică, 1966, pp. 157 şi urm., 181 şi urm. În legătură cu introducerea explicită a valorilor de adevăr în logică de către Peirce, a se vedea Church, *op. cit.*, p. 178, nota 67.

[15] Conceptul se poate defini deci, în termeni mai noi, ca o funcţie propoziţională de un argument, acest argument fiind, totodată un obiect (în cazul conceptelor de treapta întîi). Înţelegerea conceptului ca funcţie este unul din rezultatele fundamentale la care a ajuns Frege. Combinată cu cuantificarea, această modalitate de analiză a condus direct la construirea calculului predicatelor, partea cea mai importantă a logicii formale moderne.

[16] Extensiunea conceptului, înţeleasă ca parcurs valoric al funcţiei care este conceptul, nu coincide cu ceea ce în logica tra-

dițională se numește extensiune sau sferă a conceptului. În înșiși termenii lui Frege, „sfera" conceptului F este mulțimea tuturor obiectelor *care cad* sub conceptul F, adică mulțimea tuturor argumentelor pentru care funcția ia valoarea adevărat. Parcursul valoric al unei funcții nu este, riguros vorbind, o mulțime de argumente. Frege substituie vechii noțiuni de *sferă a conceptului* noțiunea sa de *parcurs valoric*. Între acestea două există totuși o conexiune intimă: condițiile de identitate pentru parcursuri valorice coincid cu condițiile de identitate pentru sfere, în înțelesul anterior al cuvîntului. Cu alte cuvinte, la două concepte le corespund una și aceeași totalitate de argumente pentru care conceptele iau valoarea adevărat, dacă și numai dacă cele două concepte au unul și același parcurs valoric. Această împrejurare justifică tratarea fregeană a extensiunii conceptului.

[17] De la analiza propozițiilor matematice, Frege trece la analiza propozițiilor oarecari; implicit, este sugerată pertinența logicii matematice pentru analiza structurii logice a limbajului natural.

[18] Pentru a pune mai pregnant în evidență caracterul nesaturat al expresiei, în exemplul propus de Frege, traducerea a trebuit să capete o expresie mai greoaie: „Capitala pe care o are Imperiul german", în loc de „Capitala Imperiului german". În limba germană, descompunerea expresiei „die Hauptstadt des Deutschen Reichs" în „die Hauptstadt des" și „Deutschen Reichs" evidențiază mai clar faptul că prima expresie este nesaturată. Frege scrie — și această observație a fost omisă din traducerea noastră — că el a atribuit primei părți, i.e. lui „die Hauptstadt des" forma genitivului.

[19] Compară cu „Concept și obiect" (ediția de față, p. 290). Ceea ce este elementar nu poate fi definit.

[20] Această succintă remarcă este capitală pentru înțelegerea ontologiei subiacente analizei logice a lui Frege. Entitățile sînt de două categorii: obiecte și funcții. La rîndul lor, expresiile limbajului se vor împărți în expresii pentru funcții și expresii care desemnează obiecte; aceste din urmă expresii sînt intitulate *nume proprii*.

[21] Propozițiile declarative *desemnează* valori de adevăr, sînt nume proprii ale Adevăratului sau Falsului.

[22] După cum se vede, Frege admite, implicit, ideea unui univers al tuturor obiectelor; o consecință este faptul că numeroase expresii despre care am fi înclinați să spunem că nu au sens constituie, în viziunea logicianului german, expresii bine definite, avînd o semnificație și astfel și un sens. Frege a respins limitările antrenate de concepția „universului de discurs", preconizată de către Boole și De Morgan, concepție restrictivă la care adera și contemporanul său, Ernst Schröder. În logica formală de astăzi, punctul de vedere al lui Frege nu a obținut succes de cauză, paradoxele relevînd caracterul „naiv" al ipotezei că există un univers al tuturor obiectelor.

[23] Frege prezintă, în continuare, funcțiile de adevăr, cum sînt numite astăzi, precum și cuantorii.

[24] Frege distinge între funcția „afirmație", cum mai este numită astăzi, funcție care ia ca valoare întotdeauna valoarea de adevăr a argumentului, și asertarea propoziției, operație căreia nu i se poate asocia vreo funcție de adevăr.

[25] Negația lui x este identică cu negația afirmației lui x și cu afirmarea negației lui x. Aici și mai jos, x este o variabilă în locul căreia putem substitui numele unui obiect oarecare, dar menirea funcției, în măsura în care este tocmai funcție de adevăr, va fi să descrie operații cu propoziții; propozițiile semnificînd valori de adevăr sînt astfel, în viziunea lui Frege, nume proprii. Funcțiile trebuind să fie definite peste tot, negația se aplică la orice obiect. Cf. și nota 21.

[26] Frege utilizează litera gotică $\mathfrak{a}$ în calitate de ceea ce astăzi numim „variabilă legată" iar litera x ca pe o „variabilă liberă". Cuantificarea unei formule conținînd o variabilă liberă reclamă astfel folosirea unui alt sort tipografic de litere. Într-adevăr, variabilele libere și cele legate îndeplinesc funcții logice diferite. În lucrările mai recente de logica predicatelor, distincția vizată de Frege este menținută ferm, însă nu se mai folosesc sorturi de litere distincte. Urmînd această uzanță, formula pe care o scrie

Frege o vom transcrie, potrivit unui simbolism uzitat astăzi: $(x)\ f(x)$.

[27] Formula se poate transcrie prin: $\vdash (x)\ (x = x)$. Remarcăm că semnul „$\vdash$" al aserţiunii, uzitat în logica de astăzi, a fost preluat de la Frege.

[28] Transcrierea formulei este: $\sim (x)(x^2 = 1)$.

[29] În transcriere: $(x) \sim (x^2 = 1)$.

[30] În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x^2 = 1)$. Sau, aplicînd cuantorul existenţial: $\vdash (\exists x)(x^2 = 1)$.

[31] În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x \geqq 0)$, respectiv $\vdash (\exists x)(x \geqq 0)$.

[32] În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x < 0)$, respectiv $\vdash (\exists x)(x < 0)$.

[33] În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$.

[34] În transcriere: $\sim (x) \sim f(x)$, respectiv $(\exists x)f(x)$.

[35] Expresiile se transcriu prin: „$\sim (x) \sim (x^2 = 1)$", „$\sim (x) \sim (x \geqq 0)$", „$\sim (x) \sim (x < 0)$", „$\sim (x) \sim (x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$".

[36] Frege a introdus în pasajul de mai sus funcţia pe care astăzi o numim „implicaţie materială" şi o concepem totodată ca avînd în calitate de argumente numai propoziţii, nu obiecte arbitrare. Formula bidimensională $\begin{array}{l}\overline{\mid}\,x\\ \llcorner\, y\end{array}$ se transcrie în notaţie lineară prin: $y \rightarrow x$ sau $y > x$ sau Cyx, ş.a.m.d.

[37] Utilizînd în locul literelor gotice litere din alfabetul latin (pentru $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ punem x, respectiv y şi z) şi folosind simbolul „$\rightarrow$" pentru funcţia $\overline{\mid}$, formula se va transcrie prin:

$$(z)(y)\{f(z, y) \rightarrow [(x)(f(z, x) \rightarrow (y = x)]\}.$$

Formula exprimă proprietatea relaţiei *f* de a fi o *funcţie* (nu în înţelesul fregean al cuvintelor „relaţie" şi „funcţie", ci în înţelesul lor din teoria mulţimilor), adică de a fi o relaţie univocă în al doilea membru al ei.

[38] Teorema diferenţialei produsului, care este utilă în calculul integral, unde induce teorema integrării prin părţi.

[39] Distincţia este deci de ordin ontologic. — Trebuie observat că ierarhia fregeană a funcţiilor nu este însoţită de o ierarhizare a obiectelor şi — poate de aceea — nu ajunge pînă la o veritabilă teorie a tipurilor iar ca atare nu s-a dovedit aptă să prevină apariţia unei contradicţii în sistemul formal pe care Frege l-a construit în *Grundgesetze der Arithmetik*.

DESPRE CONCEPT ȘI OBIECT

NOTIȚĂ INTRODUCTIVĂ

Dacă „Funcție și concept“ constituia trasarea ofensivă a unei distincții fundamentale într-o manieră neproblematică, articolul de față transformă o argumentație defensivă în prilej de adîncire a analizei prin prospectarea unor *dificultăți* de natură principială. În opusculul precedent, scrutarea structurilor lingvistice era un fir călăuzitor la capătul căruia se afla un răspuns pozitiv, descifrarea unui mister. În „Concept și obiect“, limbajul ca atare apare ca o piedică în înțelegerea pînă la capăt a unei distincții pe care el însuși o sugerase.

Nu avem sentimentul că am înțeles lucrurile pînă în adîncul lor dacă nu le-am dat nume, transformînd un act ostensiv neverbal în act de denumire. Pentru a vorbi despre un anumit concept trebuie mai întîi să-l denumim; apoi îi vom atribui însușiri, asociindu-l altor concepte. Dar nu se poate face aceasta așa cum am face despre un obiect oarecare, adică desemnîndu-l în calitate tocmai de „conceptul acesta“, fiindcă astfel l-am desemnat printr-un nume propriu și tocmai în calitate de obiect.

Benno Kerry, oponentul lui Frege, punea în cauză principiul de analiză trasat în *Fundamentele aritmeticii:* trebuie distins ferm între concept și obiect, aducînd împotriva principiului subtila observație că atunci cînd folosesc o expresie de genul „conceptul F“, prin însuși acest fapt dovedesc că distincția concept-obiect este relativă. Frege acceptă premisa criticii lui Kerry, dar inferă din ea concluzia opusă: „conceptul F“ nu este un termen conceptual, ci un nume propriu, deci pentru a vorbi despre conceptul F va trebui să recurgem la altă modalitate de desemnare a conceptului, menținînd însă neslăbită distincția concept-obiect.

Retranșarea lui Frege pe pozițiile anterioare, definite deja în „Fundamentele aritmeticii“ și dezvoltate apoi sistematic în „Funcție și concept“, i-a dictat aprofundarea unor aspecte importante ale concepției sale despre *concept* și *obiect*, *logică* și *limbă.*

Despre *concept*, Frege ne reamintește că avem trei criterii de

recunoaştere a acestuia. Recunoaştem, mai întîi, un concept prin faptul că expresia care îl desemnează admite articolul nehotărît sau alte particule care nu se pot lega de nume proprii: spunem, de pildă, „un om“, „toţi oamenii“, „o planetă“. Apoi, îl recunoaştem prin faptul că expresia care îl desemnează este una predicativă, adică intră într-o propoziţie în calitate de predicat enunţiabil despre subiecte. Şi, în fine, stăruind asupra acestui caracter de nepredicativitate, ajungem la natura esenţialmente predicativă nu numai a expresiei, dar şi a conceptului însuşi, natură predicativă în care recunoaştem un caz particular al nesaturării, al nevoii de întregire a entităţii-funcţie. Dimpotrivă, ceea ce desemnează o expresie folosită cu articolul hotărît, în calitate de subiect gramatical al unei propoziţii singulare, este o entitate saturată, autonomă, întregită: nu un concept, ci un obiect.

Logica însăşi, în lumina concepţiei fregeene despre concept, îşi precizează cîteva repere esenţiale. Se lămureşte, mai întîi, faptul că *predicativitatea conceptului* este un caracter logic originar de care nu numai logica aristotelică, ci şi aceea care nu întîmplător avea să se numească apoi: a *predicatelor*, are a da seamă. De la Aristotel şi pînă la Wilhelm Wundt, contemporanul lui Frege, logicienii au descris şi au încercat să explice cum este cu putinţă ca unul să se spună despre mai mulţi. Ideea predicativităţii conceptului va fi fost poate preluată de către Frege de la Wundt, aşa cum sugerează editorii postumelor fregeene (Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1969, p. 129, nota 2). Pe de altă parte, tot un interpret al operei lui Frege sugerează că intră în joc şi înrîurirea exercitată de către Adolf von Trendelenburg care, la rîndul lui, se referea la O. F. Gruppe, pentru a evidenţia substratul judicaţional al conceptului (cf. Hans Sluga, *Frege and the Rise of Analytic Philosophy*, în „Inquiry“, *18*, 4, 1975, p. 481). Wundt vorbea despre predicativitatea conceptului, despre faptul că acesta este partea predicativă a unei judecăţi singulare al cărui subiect este partea variabilă a judecăţii. Nu ştim dacă Frege îl va fi citit pe Aristotel, dar în schimb este cert că l-a citit pe Wundt. Oricum, concepţia lui Frege se întîlneşte în acest punct cu aceea a lui Wundt — care şi ea vine de foarte departe — numai spre a o transmuta pe un alt făgaş. E o infuzie de matematism proaspăt într-o veche problemă

în care filosofia logicii a avut mult de dat şi de luat de la filosofie pur şi simplu.

Frege a mers mai departe decît Wundt prin faptul că a dedus din predicativitate modul adecvat de formalizare a conceptului: ca funcţie. A formaliza nu înseamnă pur şi simplu a înlocui cuvintele dintr-o propoziţie prin simboluri, ci a abstrage elementul comun mai multor propoziţii de aceeaşi formă. Or, comun tuturor propoziţiilor singulare este faptul că în ele ceva se spune despre altceva de altă natură, conceptul se enunţă despre un obiect. Esenţa conceptului rezidă în faptul că se poate enunţa — în mod adevărat sau fals, dar în orice caz cu sens — despre *orice* obiect.

Pentru logică, Frege scoate de aici mai multe consecinţe de prim ordin. Relaţia logică fundamentală este aceea a căderii unui obiect *sub* un concept. Relaţii logice cum sînt aceea de subordonare a unui concept faţă de un altul trebuie explicate pe baza acestei relaţii logice primordiale. Pe distincţia între aceste două relaţii logice se clădeşte şi distincţia *proprietate-notă;* Frege statorniceşte înţelesul termenilor „proprietate" şi „notă" prin intermediul a două definiţii contextuale care pun în joc cele două relaţii. Un obiect cade sub un concept dacă şi numai dacă gîndul exprimat în propoziţia singulară corespunzătoare este adevărat. La rîndul lui, un concept poate cădea *înăuntrul* unui concept de o treaptă mai înaltă: relaţie logică analogă cu prima, însă distinctă şi care, atunci cînd îmbracă forma unei judecăţi singulare, nu se exprimă adecvat, adică în conformitate cu natura relaţiei însăşi. Într-adevăr, subiectul ei nu mai este un concept, ci un obiect *sui-generis,* desemnat de un nume propriu. Dar o asemenea relaţie poate fi exprimată şi în propoziţii de altă formă, aşa cum se întîmplă, de exemplu, atunci cînd existenţa este predicată despre un concept.

O clarificare logică importantă, pe care o face Frege în aceeaşi ordine de idei, priveşte adevărata formă a propoziţiilor universale sau particulare din logica aristotelică; structura lor autentică rezidă în raportarea logică a două concepte care stau în poziţia de predicaţie; distincţia subiect-predicat, sugerată de gramatica şi logica tradiţională, nu face decît să mascheze adevăratele relaţii logice dintre elementele gîndului. Ca atare, analiza logică trebuie

să pornească de la distincţia concept-obiect, oglindită pe plan lingvistic în distincţia nume propriu—termen conceptual.

Să ne întrebăm însă, încă odată: cum am ajuns, urmîndu-l pe Frege, la distincţia concept-obiect? Răspunsul ne expediază către propoziţia singulară ori către propoziţia de identitate, formele cele mai simple care exprimă *gînduri complete*. Conceptul, fiind nesaturat, nu este decît o parte dintr-un întreg care nu poate fi descompus logic în fragmentele sale componente altfel decît în cel puţin un fragment saturat şi în cel puţin unul nesaturat. Frege pare a sugera că conceptul este *abstras* de noi din contextul propoziţiei. Punctul de pornire îl constituie, aşadar, nu conceptul, ci gîndul pe care îl exprimă propoziţia. Acesteia din urmă i se va aplica deci analiza logică. Sinteza este însă primordială. În „Concept şi obiect" presupoziţia nu este explicitată suficient, dar întregul articol trebuie citit prin prisma afirmaţiilor lui Frege în acest sens. Cităm, astfel, dintr-un text fregean datînd din perioada de amurg: „Eu nu pornesc... de la concepte, compunînd din acestea gîndul sau judecata, ci dobîndesc părţile de gînd prin descompunerea gîndului. Prin aceasta, scrierea mea conceptuală *[Begriffsschrift]* se deosebeşte de creaţii analoge ale lui Leibniz şi ale contemporanilor săi, în pofida denumirii alese de mine, denumire care poate că nu este prea fericită" (*Nachgelassene Schriften*, vol. I, 1969, p. 273).

Limba este, la rîndul ei, pusă în joc de analiza fregeană. Structurile ei sînt în acelaşi timp exploatate, prospectate şi denunţate. Am văzut cum Frege descifrează în structuri lingvistice şi criterii gramaticale moduri esenţiale de a fi ale entităţilor semnificate. Dar, împotriva unei naivităţi care tinde să identifice structura gramaticală cu aceea logică — cum se întîmplă, de exemplu, în cazul propoziţiilor universale al căror subiect gramatical nu a fost înţeles drept ceea ce este: un predicat — Frege înţelege să avertizeze. Transparenţa structurilor lingvistice este adesea înşelătoare, lăsînd în obscuritate fondul logic. *Critica limbii* este premisa şi rezultatul analizei logice. Asemenea observaţii ne întîmpină la tot pasul în scrierile lui Frege. Dar în „Concept şi obiect" se face auzit pentru prima oară un sunet nou: Frege ne spune că înţelegerea cititorului trebuie să iasă în întîmpinarea explicaţiilor sale de autor şi că anumite lucruri

nu se lasă exprimate precis în limbajul obișnuit al filosofiei și al vieții de toate zilele, comunicarea lor fiind inevitabil neoficială, aluzivă și simpatetică. Ceea ce limbajul nu comunică însă altfel decît prin metafore și sugestii se relevă a fi tocmai alcătuirile lui intime, spre pildă felul de a fi neîntregit al unor expresii și semnificații. Limbajul simbolic nu poate face mare lucru în această privință; el poate manifesta cu claritate structura ascunsă, dar nu o poate spune. „Concept și obiect" anticipează deja *Tractatus logico-philosophicus*, dar wittgensteinismul lui Frege este numai de ordinul întîlnirilor fugitive; întregul context și însăși finalitatea considerațiilor lui Frege sugerează concluzii opuse. Căci nu „despre ceea ce nu putem vorbi trebuie să tăcem", nu convocarea la tăcere filosofică este ceea ce vrea să obțină Frege, ci numai o punere în gardă împotriva naivităților necritice.

Și totuși, avertizînd împotriva naivității filosofice, sugerînd că filosofia limbajului este critica limbajului, Frege nu a știut să meargă suficient de departe pe calea protejată împotriva capcanelor pe care ni le întinde limbajul. El nu a întrevăzut decît mult mai tîrziu potențialul de primejdii ascuns în dificultatea legată de obiectualizarea conceptului prin modul de desemnare. Dacă o expresie cum este „conceptul F" indică un obiect, nu înseamnă aceasta o dedublare primejdioasă a entităților și o punere în dependență a obiectului față de concept? Acea hipostaziere a conceptelor pe care Frege o evită, atunci cînd nu conferă conceptelor, funcțiilor autonomia, completitudinea obiectelor, intră totuși în sistemul lui pe calea dublării conceptelor prin obiecte.

Frege a sperat că dificultățile limbajului obișnuit vor fi evitate în limbajul său simbolic, unde nu este loc pentru expresii paradoxale de genul „conceptul F este un concept". El s-a înșelat în cel mai dramatic chip. Hipostazierea lingvistică este o eroare filosofică plătită scump, chiar dacă scadența vine mai tîrziu, chiar dacă prilejul este diferit, în joc fiind nu conceptele, ci, de pildă, clasele.

Oponentul lui Frege, Benno Kerry, a avut într-adevăr dreptate: distincția dintre concept și obiect este relativă. Dar argumentația lui Kerry era slabă, în timp ce contraargumentația logicianului de la Jena în favoarea unei cauze pierdute rămîne formidabilă. Dusă pînă la capăt, critica limbii pe care o inițiază Frege

arată şi ieşirea din labirint. Nu întîlnirea la jumătatea drumului, între exprimarea explicită şi tăcere, nu metafora sugestivă, receptată cu bunăvoinţă, ci numai confruntarea permanentă a expresiei cu intenţia şi semnificaţia ne poate feri de primejdii. La sfîrşitul vieţii Frege a scris un text capital intitulat „Sursele cognitive ale matematicii şi ale ştiinţelor matematice ale naturii", în care, printre altele, hipostazierea lingvistică este denunţată în cei mai categorici termeni. Expresia „Conceptul stea fixă" — scrie Frege — *nu* desemnează un obiect, cum pare să ne sugereze utilizarea articolului hotărît, ci „desemnează un concept (eine Begriffsbezeichnung ist) şi stă astfel în opoziţia cea mai netă cu orice nume propriu (*Nachgelassene Schriften*, p. 289). Avem aici numai manifestarea particulară a unei însuşiri generale a limbii, cu consecinţe fatale pentru gîndire însăşi, căci limba are tendinţa „de a crea obiecte cărora nu le corespunde vreun obiect" (*idem*, p. 288). Limba, şi nu un vorbitor izolat!

Cînd scria rîndurile de mai sus, efectuînd astfel o importantă corecţie a traiectoriei sale filosofice din „Concept şi obiect", Frege ştia foarte bine — şi o spune explicit — că el însuşi căzuse victimă iluziei hipostaziante în încercarea sa de a funda logic aritmetica. Nici o critică exegetică nu poate egala severitatea acestei retrodicţii.

DESPRE CONCEPT ȘI OBIECT[1]

Într-o serie de articole apărute în această revistă trimestrială, discutînd despre intuiție și despre procesul ei de elaborare psihică, Benno Kerry[2] s-a referit în mai multe rînduri la *Fundamentele aritmeticii* și la alte lucrări ale mele[3], exprimîndu-și uneori acordul iar alteori dezacordul cu mine. Faptul nu poate decît să mă bucure și cred că cel mai bun mod de a-mi manifesta gratitudinea este de a relua discuția asupra punctelor pe care el le combate. Aceasta mi se pare cu atît mai necesar, cu cît poziția lui se bazează, cel puțin parțial, pe o neînțelegere a afirmațiilor mele despre concept, neînțelegere pe care o pot împărtăși și alții; pe de altă parte, chiar și abstracție făcînd de această împrejurare specială, problema este destul de importantă și dificilă pentru a reclama o analiză mai amănunțită decît aceea pe care am considerat-o oportună în *Fundamentele* mele.

Cuvîntul „concept" este folosit în diferite moduri, cînd în sens psihologic, cînd în sens logic, iar uneori și într-o accepție confuză, care amestecă ambele sensuri. Această libertate o dată admisă, ea își găsește o limitare naturală în cerința ca, o dată adoptată o anumită accepție, ea să fie menținută. Eu am decis să păstrez în mod riguros o accepție pur logică. Problema dacă o anumită accepție este mai adecvată ca alta aș vrea să o las la o parte, ca fiind de mai mică importanță. Asupra terminologiei vom ajunge cu ușurință la un acord de îndată ce vom recunoaște că în cazul de față există ceva ce reclamă o denumire specială.

După părerea mea, neînțelegerea comisă de Kerry provine din faptul că acesta confundă fără să vrea accepția pe care o are pentru dînsul cuvîntul „concept" cu accepția dată de mine. Astfel, apar lesne contradicții de care

nu modul în care folosesc eu cuvîntul „concept" se face responsabil[4].

Kerry contestă ceea ce el numeşte definiţia mea a conceptului. De aceea, aş vrea să observ, în primul rînd, că explicaţia mea nu intenţionează să constituie o definiţie propriu-zisă. Nici nu se poate cere ca orice să fie definit, tot aşa cum nu putem cere chimistului să descompună orice substanţă. Ceea ce este elementar nu poate fi descompus, iar ceea ce este logic-elementar nu poate avea o definiţie propriu-zisă. Or, ceea ce este logic-elementar nu ne este dat din capul locului în mai mare măsură decît ne sînt date cele mai multe dintre elementele chimice; la ceea ce este logic-elementar se ajunge abia prin intermediul unei activităţi ştiinţifice. Dacă s-a descoperit ceva simplu, sau dacă cel puţin provizoriu ceva trebuie să fie considerat simplu, vom avea de făurit o denumire în acest scop, întrucît limba nu conţine de la bun început o expresie care să-i corespundă întocmai. Introducîndu-se un nume pentru ceva logic-simplu, o definiţie nu este posibilă. Singura soluţie este să dăm sugestii pentru ca cititorul sau auditorul să fie condus să înţeleagă cuvintele în sensul vizat[5].

Kerry vrea să arate că distincţia dintre concept şi obiect nu este absolută. El spune: „Mai sus, ne-am exprimat părerea că relaţia dintre conţinutul conceptului şi obiectul conceptului este, într-o anumită privinţă, o relaţie cu totul specifică şi ireductibilă; dar aceasta nu implică în nici un caz că proprietatea de a fi concept şi proprietatea de a fi obiect s-ar exclude reciproc; această din urmă idee nu rezultă din prima, tot aşa cum, de pildă, din ipoteza că relaţia tată-fiu ar fi ireductibilă nu urmează că un om nu poate fi în acelaşi timp tată şi fiu (deşi, fireşte, un om nu poate fi, de exemplu, tatăl celui al cărui fiu este)".

Să pornim de la această comparaţie. Dacă ar exista sau ar fi existat fiinţe care să fie taţi dar incapabile să fie fii, asemenea fiinţe ar fi, în mod evident, cu totul diferite de toţi oamenii care sînt fii. Or, aici se întîmplă

ceva asemănător. Conceptul — aşa cum înţeleg acest cuvînt — este predicativ*. Dimpotrivă, numele unui obiect, numele propriu, nu poate fi folosit în nici un fel în rolul de predicat gramatical[6]. Fără îndoială, acest lucru trebuie explicat, altfel el poate părea fals. Într-adevăr, oare nu putem spune despre un lucru că este Alexandru cel Mare, sau că este numărul patru, sau că este planeta Venus, la fel cum putem spune despre un lucru că este verde, sau că este mamifer? Dacă cineva gîndeşte aşa, el nu deosebeşte accepţiile cuvîntului „este". În ultimele două exemple, acest cuvînt este folosit în calitate de copulă, în calitate de simplu semn verbal al enunţării. Ca atare, acest cuvînt poate fi uneori înlocuit printr-o simplă terminaţie personală; să comparăm, de exemplu *dieses Blatt ist grün* şi *dieses Blatt grünt*. Spunem atunci că ceva cade sub un concept şi că predicatul gramatical desemnează aici acest concept. În primele trei exemple, pe de altă parte, „este" e folosit la fel ca semnul egalităţii în aritmetică, pentru a exprima o ecuaţie**. În propoziţia „Luceafărul de dimineaţă este Venus" avem două nume proprii, „Luceafărul de dimineaţă" şi „Venus", pentru acelaşi obiect. În propoziţia „Luceafărul de dimineaţă este o planetă" noi avem un nume propriu — „Luceafărul de dimineaţă", şi un nume de concept — „planetă". Din punct de vedere lingvistic, ce-i drept, nu s-a întîmplat decît că „Venus" a fost înlocuit prin „o planetă"; în fapt însă, relaţia a devenit cu totul alta. O ecuaţie este reciprocabilă; căderea unui obiect sub un concept este o relaţie ireciprocabilă. În propoziţia „Lucea-

Şi anume este semnificaţia unui predicat gramatical.

Eu folosesc cuvîntul „egal" şi simbolul „=" în sens de „acelaşi cu", „nu altul decît", „identic cu" Vezi şi E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Leipzig, 1890), vol I, § 1. Schröder trebuie să fie totuşi criticat pentru că nu face distincţie între cele două relaţii radical deosebite — relaţia de cădere, subsumare a unui obiect sub un concept şi relaţia de subordonare a unui concept faţă de altul. Observaţiile sale privitoare la *Vollwurzel* suscită de asemenea obiecţii. Simbolul lui Schröder $\Subset$ nu este un simplu înlocuitor al copulei.

fărul de dimineață este Venus", „este", în mod evident, nu constituie doar simpla copulă, ci, prin conținutul său, este o parte esențială a predicatului, așa încît cuvîntul „Venus" nu cuprinde predicatul în întregimea sa*. Se poate spune, în schimb: „Luceafărul de dimineață este nu altul decît Venus"; ceea ce înainte era concentrat în simplul „este" se desfășoară aici în patru cuvinte separate, iar în „este nu altul decît", cuvîntul „este" constituie într-adevăr, de această dată, numai copula. Ceea ce se predică aici este deci nu *Venus*, ci *nu altul decît Venus*. Aceste cuvinte semnifică un concept, sub care, de bună seamă, cade un singur obiect. Un atare concept trebuie totuși să fie deosebit întotdeauna de obiect**. Avem aici un cuvînt, „Venus", care nu poate fi niciodată predicat propriu-zis, deși el poate constitui o parte a unui predicat. Semnificația*** acestui cuvînt, așadar, nu se poate înfățișa niciodată ca un concept, ci numai ca un obiect[7]. Nici Kerry, desigur, nu ar contesta că ceva de acest gen există într-adevăr. Dar prin aceasta se admite o distincție a cărei recunoaștere prezintă o însemnătate capitală, distincția între ceea ce poate interveni numai ca obiect și orice altceva. Or, această distincție nu s-ar estompa nici dacă ar fi adevărat, așa cum crede Kerry, că există concepte care pot fi și obiecte. — Există într-adevăr cazuri care par să pledeze în favoarea acestei concepții. Eu însumi am arătat (în *Fundamente*, § 53, *ad fin.*) că un concept poate cădea sub un concept superior, ceea ce însă nu trebuie confundat cu subordonarea unui concept față de altul[8]. Kerry nu se referă la aceasta, ci aduce următorul exemplu: „Conceptul «cal» este un concept ușor de obținut" și consideră că conceptul „cal" este un obiect, și anume unul din obiectele care cad sub conceptul „concept ușor de obținut". Așa este, într-adevăr! Cuvintele „con-

* Vezi lucrarea mea *Fundamentele*, § 66, notă.

** Vezi lucrarea mea *Fundamentele*, § 51.

*** Vezi articolul meu „Despre sens și semnificație" („Über Sinn und Bedeutung") care urmează să apară în curînd în „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik".

ceptul «cal»" desemnează un obiect, dar tocmai de aceea ele nu desemnează un concept, în accepția pe care eu o dau acestui cuvînt. Faptul semnalat concordă pe deplin cu criteriul pe care l-am dat* — și anume că articolul hotărît la singular indică întotdeauna un obiect, în timp ce articolul nehotărît însoțește un nume de concept.

Kerry susține că regulile logice nu se pot întemeia pe distincții lingvistice; dar propriul meu mod de procedură nu poate fi evitat în genere de acel care stabilește asemenea reguli; într-adevăr, nu ne putem înțelege altfel decît prin intermediul limbii, așa că în cele din urmă trebuie să ne bizuim întotdeauna pe faptul că ceilalți oameni înțeleg în linii mari cuvintele, flexiunile și construcția propozițiilor în același mod în care le înțelegem și noi. Așa cum am spus mai sus, eu nu am încercat să dau o definiție, ci numai să sugerez, în care scop am apelat la înțelegerea spiritului limbii germane. Foarte mult pledează în favoarea mea faptul că există un acord atît de deplin între distincția lingvistică și distincția reală. În ceea ce privește articolul nehotărît, nu avem a observa probabil, nici o excepție de la regula noastră, în afara unor expresii ieșite din uz, cum ar fi *Ein edler Rat* [„Consilier"]. Lucrurile nu stau la fel de simplu în cazul articolului hotărît, în special la plural; dar criteriul meu nu se referă la acest caz. La singular, după cîte înțeleg, se ridică semne de întrebare numai atunci cînd un singular ia locul unui plural, ca în propoziția „turcul a asediat Viena", „calul este patruped". Aceste cazuri pot fi recunoscute cu atîta ușurință drept cazuri speciale, încît apariția lor nu afectează aproape deloc valoarea regulii noastre. Este clar că în prima propoziție „turcul" este numele propriu al unui popor. A doua propoziție, de bună seamă, va fi considerată mai potrivit drept expresia unei judecăți universale, cum ar fi, de pildă, „toți caii sînt patrupede" sau „toți caii ce au o constituție normală

* Vezi și *Fundamente*, §§ 51, 66 notă, § 68, notă.

sînt patrupede", lucru despre care vom mai discuta ulterior*. Kerry afirmă că criteriul meu este inadecvat; el susţine că în propoziţia „conceptul despre care vorbesc acum este un concept individual" numele compus din cinci cuvinte semnifică în mod cert un concept; Kerry nu înţelege însă cuvîntul „concept" în sensul în care este luat de mine, iar contradicţia nu rezidă în stipulările făcute de mine. Nimeni totuşi nu poate pretinde ca modul meu de exprimare să concorde cu cel al lui Kerry.

Nu putem să nu recunoaştem că aici, ce-i drept, ne izbim de un anume impediment lingvistic ce nu poate fi evitat atunci cînd spunem că conceptul *cal* nu este un concept**, în timp ce, de pildă, oraşul Berlin este un oraş, iar vulcanul Vezuviu este un vulcan. Limba se găseşte aici într-un impas care dă seama de abaterea de la

* În prezent, lumea pare dispusă să exagereze semnificaţia afirmaţiei că diferitele expresii lingvistice nu sînt niciodată complet echivalente, că un cuvînt nu poate fi niciodată tradus în mod exact într-o altă limbă. S-ar putea merge — cine ştie! — încă şi mai departe, spunînd că acelaşi cuvînt nu este înţeles în exact acelaşi mod de către oamenii care folosesc aceeaşi limbă. Nu voi cerceta în ce *măsură aceste afirmaţii sînt adevărate;* aş vrea numai să subliniez că, cu toate acestea, expresii diferite au adesea un element comun, pe care îl numesc sens — iar în cazul special al propoziţiilor, gînd. Altfel spus, nu trebuie omis că acelaşi sens, acelaşi gînd, poate fi exprimat în mod diferit; aşadar, diferenţa nu priveşte în cazul de faţă sensul, ci numai înţelegerea, nuanţa, coloratura gîndului fiind astfel în afara logicii[9]. Este posibil ca o anumită propoziţie să furnizeze nu mai multă şi nu mai puţină informaţie decît o altă propoziţie; totodată, în pofida varietăţii limbilor, omenirea are un bagaj comun de gînduri. Dacă orice transformare a expresiei ar fi interzisă pe motivul că această transformare ar afecta şi conţinutul, logica ar fi pur şi simplu scoasă din funcţiune; într-adevăr, cu greu ar putea fi dusă la capăt sarcina logicii, fără a ne strădui să recunoaştem gîndul în numeroasele sale înfăţişări. Mai mult, toate definiţiile ar trebui respinse, în acest caz, ca false.

** Ceva analog se întîmplă atunci cînd afirmăm despre propoziţia „Acest trandafir este roşu", că predicatul gramatical „este roşu" aparţine subiectului „acest trandafir". Aici, cuvintele „Predicatul gramatical «este roşu»" nu constituie predicatul, ci subiectul gramatical. Prin însuşi faptul de a-l denumi în mod explicit un predicat, noi îl privăm de această proprietate.

uzanţă[10]. Caracterul cu totul aparte al cazului nostru este arătat de Kerry însuşi, prin intermediul ghilimelelor în care este pus cuvîntul „cal“; eu folosesc în acelaşi scop literele cursive. N-a existat nici un motiv spre a sublinia cuvintele „Berlin“ şi „Vezuviu“ într-un mod asemănător. În cadrul investigaţiilor logice apare, nu o dată, nevoia de a enunţa ceva despre un concept şi de a exprima aceasta în forma obişnuită pe care o îmbracă aceste aserţiuni, respectiv de a face din ceea ce se enunţă conţinutul predicatului gramatical. În consecinţă, se poate aştepta ca semnificaţia subiectului gramatical să fie conceptul; însă conceptul ca atare nu poate juca acest rol, dată fiind natura lui predicativă, şi de aceea el trebuie transformat mai întîi într-un obiect sau mai exact, el trebuie reprezentat printr-un obiect*, pe care noi îl desemnăm prin cuvîntul „conceptul“, pe care îl punem în faţă; de exemplu:

„Conceptul *om* nu este vid“.

Aici, primele două cuvinte trebuie privite ca un nume propriu** care nu poate fi folosit predicativ mai mult decît „Berlin“ sau „Vezuviu“[11]. Cînd spunem „Iisus cade sub conceptul *om*“, atunci (lăsînd la o parte copula) predicatul este:

„ceva care cade sub conceptul *om*“,

iar aceasta semnifică acelaşi lucru ca:

„un om“.

Dar combinaţia de cuvinte

„conceptul *om*“

este numai o parte a acestui predicat.

Împotriva naturii predicative a conceptului s-ar putea obiecta că noi vorbim totuşi despre un concept-subiect.

---

* Vezi ***Fundamentele aritmeticii***, p. X. (În volumul de faţă, p. 37 — nota trad.).

** Spun că este nume propriu orice semn pentru un obiect.

Dar chiar și în asemenea cazuri, de exemplu, în cadrul propoziției

„toate mamiferele au sînge roșu"

natura predicativă* a conceptului nu poate fi ignorată; într-adevăr, în loc de aceasta se poate spune:

„ceea ce este un mamifer are sînge roșu",

sau

„dacă ceva este mamifer, atunci are sînge roșu"[12].

Atunci cînd am scris *Fundamentele aritmeticii*, nu făcusem încă distincția intre sens și semnificație** și ca atare reuneam în expresia „conținutul posibil de judecată" ceea ce desemnăm acum în mod distinct prin cuvintele „gînd" și „valoare de adevăr". În consecință, nu mai accept integral explicația dată de mine acolo la p. 77, în ceea ce privește modul în care a fost formulată; concepția mea rămîne totuși, în esență, aceeași[13]. Putem spune în mod lapidar, luînd „subiect" și „predicat" în sens lingvistic: conceptul este semnificația unui predicat, obiectul este ceva ce nu poate fi niciodată întreaga semnificație a unui predicat, dar poate fi semnificația unui subiect. Trebuie observat aici că cuvintele „toți", „fiecare", „nici unul", „unii" sînt puse înaintea termenilor conceptuali. În propozițiile afirmative și negative universale sau particulare, noi exprimăm relații între concepte și folosim cuvintele de mai sus pentru a indica tipul special al relației[14]. Așadar, logic vorbind, ele nu trebuie asociate mai strîns cu termenii conceptuali care le succed, ci trebuie

* Ceea ce numesc aici natură predicativă a conceptului este tocmai un caz special al nevoii de întregire, al nesaturării, pe care am prezentat-o ca trăsătura esențială a unei funcții în lucrarea mea *Funcție și concept (Funktion und Begriff)*, (Jena, 1891). Acolo era greu să se evite expresia „funcția $f(x)$", deși se ridica de asemenea dificultatea că această expresie nu are ca semnificație o funcție.

** Vezi studiul meu „Despre sens și semnificație", în „Zeitschrift für Phil. und phil. Kritik".

raportate la propoziţie în ansamblul ei. Aceasta se constată cu uşurinţă în cazul negaţiei. Dacă în propoziţia:

„toate mamiferele sînt animale terestre"

expresia „toate mamiferele" ar exprima subiectul logic al predicatului *sînt animale terestre*, atunci, pentru a nega întreaga propoziţie, ar trebui să negăm predicatul: „nu sînt animale terestre". În loc de aceasta, particula „nu" trebuie pusă în faţa lui „toate", ceea ce arată că „toate" se raportează logic la predicat[15]. Pe de altă parte, noi negăm propoziţia „conceptul *mamifer* este subordonat conceptului *animal terestru*", negînd predicatul: „nu este subordonat conceptului *animal terestru*".

Dacă reţinem faptul că, potrivit modului meu de exprimare, expresii cum sînt „conceptul F" nu desemnează concepte, ci obiecte, cele mai multe din obiecţiile lui Kerry se prăbuşesc din capul locului. Dacă el crede (p. 281) că eu aş fi identificat conceptul cu extensiunea conceptului, el se înşeală. Eu nu am făcut decît să-mi exprim părerea că în cadrul expresiei „numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului *echinumeric cu conceptul F*", cuvintele „extensiunea conceptului", puteau fi înlocuite prin „conceptul". Se va observa că aici cuvîntul „concept" este folosit cu articolul hotărît. Dealtfel, aceasta nu este decît o observaţie pasageră, pe temeiul căreia nu am clădit nimic.

De vreme ce Kerry nu reuşeşte să umple prăpastia dintre concept şi obiect, s-ar putea încerca o valorizare a propriilor mele indicaţii în acest sens. Am arătat că aserţiunea numerică cuprinde un enunţ despre un concept*; eu vorbesc despre proprietăţi enunţate despre un concept şi admit că un concept poate cădea sub un concept mai înalt**. Am spus că existenţa este o proprietate a unui concept. Sensul în care înţeleg aceasta devine clar pe baza unui exemplu. În propoziţia „există cel puţin o

* *Fundamentele aritmeticii,* § 46.
** *Ibidem,* § 53.

rădăcină pătrată din 4“ nu se afirmă ceva despre numărul determinat 2, și nici despre —2, ci despre un concept, *rădăcina pătrată din 4*, și anume se afirmă că acesta nu este vid. Dar dacă același gînd îl exprim astfel: „Conceptul *rădăcină pătrată din 4* este realizat“, atunci primele cinci cuvinte formează numele propriu al unui obiect, și tocmai despre acest obiect se enunță ceva. Trebuie observat însă că ceea ce se enunță aici nu coincide cu ceea ce s-a enunțat despre concept[16]. Faptul va surprinde numai pe acel ce nu reușește să vadă că un gînd poate fi analizat în mai multe feluri, astfel încît în rol de subiect sau predicat apare cînd ceva cînd altceva. Gîndul însuși nu determină încă ceea ce trebuie privit ca subiect. Spunînd: „subiectul acestei judecăți“, noi nu desemnăm nimic determinat, atîta timp cît nu indicăm o anumită modalitate de analiză. De regulă, analiza este legată de o anumită formulare. Dar să nu uităm totuși că diferite propoziții pot exprima unul și același gînd. De exemplu, gîndul pe care îl avem în vedere ar mai putea fi considerat și ca o afirmație despre numărul 4:

„Numărul patru are proprietatea că există ceva a cărui rădăcină pătrată este“.

Limba are mijloace de a prezenta ca subiect cînd una cînd alta din părțile gîndului. Unul din cele mai obișnuite mijloace este distincția dintre forma activă și forma pasivă. Ca atare, nu este imposibil ca *un anumit* mod de analiză a unui gînd să-l prezinte ca o judecată singulară, un alt mod ca o judecată particulară, iar un al treilea ca o judecată universală. De aceea, nu trebuie să ne mire faptul că una și aceeași propoziție poate fi concepută ca un enunț despre un concept și de asemenea, ca un enunț despre un obiect; trebuie însă să observăm că ceea ce se enunță diferă de la caz la caz. În propoziția „există cel puțin o rădăcină pătrată din 4“ nu este permis să înlocuim cuvintele „rădăcină pătrată din 4“ prin „conceptul *rădăcină pătrată din 4*“; cu alte cuvinte, enunțul care convine conceptului nu convine obiectului. Deși propoziția

noastră nu prezintă conceptul ca un subiect, ea enunță ceva despre el; ea poate fi înțeleasă ca exprimînd căderea unui concept sub un concept mai înalt*. Dar astfel distincția între obiect și concept nu este cîtuși de puțin estompată. În primul rînd, observăm că propoziția „există cel puțin o rădăcină pătrată din 4“ nu infirmă natura predicativă a conceptului. Într-adevăr, putem spune: „există ceva care are proprietatea că înmulțit cu el însuși dă 4“. Ca atare, ceea ce se enunță aici despre un concept nu se poate enunța niciodată despre un obiect; un nume propriu nu poate fi niciodată o expresie predicativă, deși el poate fi parte a unei atari expresii. Nu vreau să spun că ar fi fals să afirmăm despre un obiect ceea ce este afirmat aici despre concept; vreau să spun că este imposibil, lipsit de sens, să afirmăm aceasta. Propoziția „există Iulius Caesar“ nu este nici adevărată, nici falsă, ci fără sens; ce-i drept, propoziția „există un om al cărui nume este Iulius Caesar“ are un sens, dar aici avem iarăși un concept, așa cum lasă să se vadă articolul nehotărît. Nu altul este cazul propoziției „una este Viena“. Să nu ne lăsăm înșelați de faptul că limba folosește *adesea un același cuvînt cînd ca nume propriu,* cînd ca desemnare a unui concept. În cazul de față, numeralul indică prezența unui nume de concept; „Viena“ este aici un nume de concept, deopotrivă cu „oraș imperial“[17]. Folosind in acest sens cuvîntul, putem spune: „Triestul nu este o Vienă“. Pe de altă parte, dacă înlocuim numele propriu format din primele cinci cuvinte ale propoziției „conceptul *rădăcină pătrată din 4* este realizat“ prin „Iulius Caesar“, obținem o propoziție care are sens, dar este falsă; faptul de a fi realizat, în înțelesul dat aici cuvîntului, se poate enunța cu adevărat numai despre obiecte de un gen cu totul special, și anume despre obiecte care pot fi desemnate de nume proprii avînd forma „conceptul F“[18]. În cadrul propoziției noastre inițiale, po-

* În *Fundamente* un asemenea concept l-am numit concept de ordinul doi; în lucrarea mea „Funcție și concept“ l-am numit concept de treapta a doua, așa cum fac și aici.

sibilitatea de înlocuire a cuvintelor „conceptul *rădăcină pătrată din 4*" diferă radical de posibilitatea de înlocuire a cuvintelor „rădăcină pătrată din 4"; altfel spus, semnificațiile celor două expresii sînt esențial diferite.

Ceea ce am ilustrat aici printr-un anumit exemplu este valabil în cazul general; comportarea conceptului este esențial predicativă pînă și în cazul cînd ceva se enunță despre dînsul; în consecință, și în acest din urmă caz el nu poate fi înlocuit decît tot printr-un concept, niciodată printr-un obiect. Conceptele de treapta a doua, sub care cad concepte, sînt esențial distincte de conceptele de treapta întîi, sub care cad obiecte. Relația unui obiect față de conceptul de treapta întîi sub care cade se deosebește de relația — analogă, desigur — a unui concept de treapta întîi față de un concept de treapta a doua. Pentru a marca în egală măsură deosebirea și asemănarea, am putea spune, eventual, că în timp ce un obiect cade *sub* un concept de treapta unu, un concept cade *înăuntrul* unui concept de treapta doi. Astfel, distincția între un concept și un obiect este menținută cît se poate de ferm.

Legat de aceasta, intervine ceea ce am spus în *Fundamentele aritmeticii*, § 53, despre accepția pe care o dau cuvintelor „proprietate" și „notă". Prezentarea lui Kerry îmi dă prilejul să mă întorc încă o dată la această temă. Cuvintele de mai sus servesc pentru a semnifica relații, în propoziții ca „Φ este o proprietate a lui Γ" și „Φ este o notă a lui Ω". Potrivit terminologiei mele, ceva poate fi în același timp o proprietate și o notă, dar nu a unuia și aceluiași. Conceptele sub care cade un obiect le numesc proprietăți ale acestui obiect[19], astfel că

„a fi Φ este o proprietate a lui Γ"

nu este decît un alt mod de a spune că

„Γ cade sub conceptul lui Φ".

Dacă obiectul Γ are proprietățile Φ, X și Ψ, eu le pot strînge în una singură, Ω, astfel încît va fi același lucru

dacă spun că Γ are proprietatea Ω sau dacă spun că Γ are proprietăţile Φ, X şi Ψ. Spun atunci că Φ, X şi Ψ sînt note ale conceptului Ω şi, în acelaşi timp, proprietăţi ale lui Γ. Este limpede că relaţiile lui Φ faţă de Γ şi faţă de Ω sînt total diferite, şi că, drept consecinţă, trebuie să apelăm la denumiri diferite. Γ cade sub conceptul Φ; dar Ω, care este el însuşi un concept, nu poate cădea sub un concept de treapta întîi Φ, ci poate sta într-o relaţie analogă numai cu un concept de treapta doi. Pe de altă parte, Ω este subordonat lui Φ.

Să luăm un exemplu. În loc de a spune:

„2 este un număr pozitiv" şi
„2 este un număr întreg" şi
„2 este mai mic ca 10"

mai putem spune:

„2 este un număr întreg pozitiv mai mic ca 10".

Aici,

a fi un număr pozitiv,
a fi un număr întreg,
a fi mai mic ca 10

apar ca proprietăţi ale obiectului 2 şi totodată ca note ale conceptului

număr întreg pozitiv mai mic ca 10[20].

Acesta nu este nici număr pozitiv, nici număr întreg, nici mai mic ca 10. El este subordonat, într-adevăr, conceptului *număr întreg*, însă nu cade sub el.

Să comparăm cele de mai sus cu afirmaţiile lui Kerry din al doilea articol al său, la p. 424: „Prin numărul 4 înţelegem rezultatul combinării aditive a lui 3 şi 1. Obiectul conceptual al conceptului dat prin aceasta este individul numeric 4, un număr bine definit în şirul numerelor naturale. Acest obiect poartă în sine în mod evident, notele menţionate în conceptul lui şi nu admite vreo altă notă în afara acestora, cu condiţia de a ne abţine — aşa

cum sîntem și obligați — să numărăm ca *propria* ale obiectului infinitatea relațiilor sale cu toate celelalte numere individuale; în mod similar, *Numărul 4* este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1".

Constatăm de la prima vedere că distincția mea între proprietate și notă este aici complet estompată. Kerry distinge aici între un număr 4 și *Numărul 4*. Trebuie să mărturisesc că această deosebire este de neînțeles pentru mine. Numărul 4 trebuie să fie un concept; *Numărul 4* trebuie să fie un obiect conceptual, și nimeni altul decît individul numeric 4. Nu trebuie să mai demonstrăm faptul că ceea ce avem aici nu este distincția mea între concept și obiect. S-ar putea crede că ceea ce întrevede aici Kerry — într-un mod foarte obscur — ar fi distincția mea între sensul și semnificația cuvintelor „numărul 4"*. Dar numai despre semnificație se poate vorbi ca despre rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1.

Cum urmează, așadar, a fi înțeles cuvîntul „este" în propozițiile „numărul 4 este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1" și „*Numărul 4* este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1"? Este acest cuvînt numai o copulă, sau el ne ajută să exprimăm o ecuație logică? În primul caz, ar fi trebuit spus „rezultat", nu „rezultatul", iar propozițiile ar fi sunat, de pildă, astfel:

> „Numărul 4 este un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1";
>
> „*Numărul 4* este un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1".

În acest caz, obiectele pe care Kerry le desemnează prin:

„numărul 4" și „*Numărul 4*"

ar cădea amîndouă sub conceptul

rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1.

---

* Vezi articolul meu „Despre sens și semnificație", citat mai sus.

Dar atunci, singura întrebare ar fi prin ce se deosebesc aceste obiecte. Eu folosesc aici cuvintele „obiect“ și „concept“ în modul care îmi este familiar. Aș formula ceea ce Kerry pare să încerce a spune, după cum urmează:

„Numărul 4 are acele și numai acele proprietăți care sînt note ale conceptului

rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1“.

În acest caz, sensul primei dintre cele două propoziții ale noastre l-aș exprima astfel:

„A fi un număr 4 este tot una cu a fi un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1“.

Dar atunci, ceea ce am presupus mai sus că vroia să spună Kerry ar mai putea fi redat și astfel:

„Numărul 4 are acele și numai acele proprietăți care sînt note ale conceptului *număr 4*“.

Nu discutăm aici dacă această afirmație este sau nu adevărată. Totodată, am putea omite sublinierea specială, prin folosirea literelor cursive, a articolului hotărît în expresia *„Numărul 4“*.

Dar în cadrul acestor tentative de interpretare am presupus că în cel puțin una din cele două propoziții, cuvintele „rezultat“ și „număr 4“ erau folosite cu articolul hotărît numai din nebăgare de seamă. Dacă luăm cuvintele așa cum se prezintă, le putem privi numai ca avînd sensul unei identități logice[21], ca de pildă:

„Numărul 4 nu este nimic altceva decît rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1“.

Folosirea articolului hotărît în cuvîntul „rezultat“ este justificată logic în cazul de față numai dacă: 1. se știe că există un asemenea rezultat și 2. se știe că există nu mai mult decît unul singur. Atunci, expresia desemnează într-adevăr un obiect și trebuie considerată ca un nume propriu. Dacă ambele noastre propoziții ar trebui privite ca ecuații logice, atunci — întrucît membrii drepți sînt

identici — ar urma de acolo că numărul patru este *Numărul 4* sau, dacă preferăm, că numărul 4 nu este nimic altceva decît *Numărul 4;* în care caz, distincția sugerată de Kerry s-ar dovedi inconsistentă. Eu însă nu îmi propun să relev aici contradicțiile expunerii sale. Modul în care el înțelege cuvintele „obiect“ și „concept“ nu este, strict vorbind, ceea ce mă interesează aici; eu încerc numai să pun într-o lumină mai clară propriul meu mod de folosire a acestor cuvinte și să arăt, cu acest prilej, că în orice caz modul meu de folosire diferă de cel al lui Kerry, indiferent dacă acel din urmă mod este sau nu consistent.

Nu contest cîtuși de puțin dreptul lui Kerry de a folosi cuvintele „concept“ și „obiect“ într-un mod propriu, cu condiția ca și el să-mi respecte același drept și să admită că prin denumirile mele am ajuns la o distincție de cea mai mare însemnătate. De bună seamă, aici, în calea comunicării dintre mine și cititor se ridică un obstacol cu totul aparte. O anumită constrîngere lingvistică face ca expresiile pe care le folosesc, atunci cînd sînt luate literal, să-mi trădeze uneori gîndul, întrucît, deși ceea ce am în vedere este un concept, ceea ce este denumit este un obiect. Sînt pe deplin conștient de faptul că în aceste cazuri se presupune că cititorul ar fi gata să-mi iasă în întîmpinare la jumătatea drumului, înțelegînd *cum grano salis* afirmațiile mele[22].

Cineva ar putea crede că această dificultate a fost creată în mod artificial, că nu se impune să luăm în considerație ceva atît de dificil ca ceea ce eu numesc concept și, în sfîrșit, că am putea considera, alături de Kerry, căderea unui obiect sub un concept ca o relație în care ceva ar putea interveni cînd ca obiect, cînd ca un concept. Cuvintele „obiect“ și „concept“ ar servi atunci numai pentru a indica pozițiile diferite în cadrul acestei relații. Se poate proceda astfel; dar cel ce își închipuie că dificultatea este astfel evitată se înșeală amarnic. Dificultatea este numai deplasată; într-adevăr, nu toate părțile unui gînd pot fi închise în sine; cel puțin una dintre ele tre-

buie să fie nesaturată sau predicativă, altfel părţile nu s-ar îmbina[23]. De exemplu, sensul expresiei „numărul 2" nu se îmbină cu cel al expresiei „conceptul *număr prim*" fără un liant. Un asemenea liant îl folosim în propoziţia „numărul 2 cade sub conceptul *număr prim*". El rezidă în cuvintele „cade sub", care reclamă o întregire în două moduri — printr-un subiect şi un acuzativ — şi numai această nesaturare a sensului lor permite folosirea lor ca liant. Numai cînd ele au fost întregite în aceste privinţe obţinem un sens complet, un gînd. Spun că asemenea cuvinte sau expresii semnifică o relaţie. Or, în cazul relaţiei ne întîmpină aceeaşi dificultate pe care încercam s-o evităm în cazul conceptului. Într-adevăr, cuvintele „relaţia de cădere a unui obiect sub un concept" nu desemnează o relaţie, ci un obiect, iar raporturile dintre cele trei nume proprii „numărul 2", „conceptul *număr prim*", „relaţia de cădere a unui obiect sub un concept" sînt la fel de delicate ca şi raporturile dintre primele două; oricum le-am alătura, tot nu obţinem o propoziţie. Ca atare, constatăm lesne că dificultatea provenită din nesaturarea unei părţi a gîndului poate fi, de bună seamă, deplasată, dar nu şi evitată. „Închis în sine" şi „nesaturat" sînt, desigur, simple expresii metaforice, dar în cazul de faţă eu nu urmăresc şi nu sînt în măsură să dau altceva decît simple indicaţii aluzive.

Poate că lucrurile vor fi înţelese cu mai multă uşurinţă în cazul cînd cititorul consultă lucrarea mea „Funcţie şi concept". În problema a ceea ce se numeşte funcţie în analiză, ne ciocnim de acelaşi obstacol; or, o analiză mai pătrunzătoare va evidenţia faptul că acest obstacol ţine de însăşi esenţa problemei, este înrădăcinat în natura limbii noastre; nu putem evita o anumită inadecvare a expresiei lingvistice şi de aceea nu ne mai rămîne altceva decît să devenim conştienţi de acest lucru şi să ţinem întotdeauna seama de el.

NOTE

[1] Articolul poartă în original titlul „Über Begriff und Gegenstand"; a apărut în „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie", *16*, 1892, pp. 192—205. O redactare preliminară a articolului s-a păstrat printre manuscrisele lui Frege și a fost editată în Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften* (hrsg. von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach; Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969), pp. 96—127, sub titlul: *Über den Begriff der Zahl/2, Eine kritische Auseinandersetzung mit Kerry.*

[2] Benno Kerry a predat filosofia la Universitatea din Strassburg pînă la moartea sa, în 1889. Autor al cărții *System einer Theorie der Grenzbegriffe-Ein Beitrag zur Erkenntnistheorie* (Leipzig und Wien, 1890) editată postum.

[3] Kerry a publicat începînd din 1855 în revista în care replica lui Frege a apărut în 1892, un ciclu de 8 articole sub titlul general *Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung.*

[4] În *Fundamentele aritmeticii*, Frege stipulase ca un prim principiu călăuzitor distincția netă între psihologic și logic, între subiectiv și obiectiv. Ca atare, pentru el conceptul nu trebuie confundat cu o reprezentare, cu „prelucrarea psihică a intuiției", așa cum procedau psihologiștii. Totuși, ascuțișul criticii lui Frege nu este îndreptat aici împotriva psihologismului, tema dezbătută fiind caracterul relativ (Kerry) sau absolut (Frege) al distincției concept-obiect.

[5] În „Funcție și concept" se părea totuși că fusese sugerată o definiție a conceptului, luîndu-se ca punct de pornire noțiunea nedefinită de funcție, precum și noțiunea de valoare a funcției pentru un argument dat: un concept este o funcție care întotdeauna (= pentru orice argument) asumă ca valoare o valoare de adevăr. Faptul că aceste idei nu sînt introduse într-un cadru formal-axiomatic nu permite totuși să decidem dacă este într-adevăr așa. Oricum, dificultatea de care va trebui să se țină seamă nu constă atît în bine cunoscutul *anàgke stenai,* necesitatea de a ne

opri în fața ideilor primitive, cît în acea particularitate a limbii pe care Frege o relevă mai jos: transformarea conceptului în obiect, atunci cînd încercăm să vorbim despre el denumindu-l. Această particularitate, legată de nesaturarea unor expresii, este înrădăcinată în nesaturarea entităților desemnate.

[6] Predicativitatea conceptului este una din temele mari ale filosofiei tradiționale a logicii. Contribuția lui Frege se înscrie pe linia unei tradiții glorioase, care începe cel puțin de la Platon și Aristotel.

În contextul de față, predicativitatea este înțeleasă ca însușire a conceptului de a fi semnificația unei expresii predicative. Conceptul nu poate fi decît predicat, va arăta Frege de-a lungul articolului său. O expresie care apare în calitate de subiect gramatical nu poate fi o expresie predicativă, iar o expresie predicativă nu poate să constituie un subiect gramatical al unei propoziții. Predicativitatea este, așadar, legată de relația logică fundamentală în care se găsește conceptul: raportarea față de obiectele individuale. Obiectele cad sub concept sau cad în afara lui. Un concept este corect atunci cînd pentru orice obiect s-a definit dacă el cade sau nu sub concept (a se vedea și „Funcție și concept").

Predicativitatea conceptului își găsește expresia, în aceeași ordine de idei, în afirmația lui Frege din *Fundamentele aritmeticii:* „Pentru mine, conceptul este un posibil predicat al unui conținut judicabil singular, în timp ce obiectul este un posibil subiect al acestuia" (§ 66, cf. prezentul volum, p. 114). Atrăgînd atenția asupra acestui pasaj, Ignacio Angelelli, urmîndu-l pe Heinrich Scholz, vede aici o sugestie kantiană; Kant, într-adevăr, scrie în *Critica rațiunii pure:* „Conceptele însă se raportează, ca predicate ale unor judecăți posibile, la o reprezentare oarecare despre un obiect *încă* nedeterminat" (Ed. Științifică, 1969, p. 103). A se vedea Ignacio Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and traditional philosophy*, Reidel, 1967, pp. 150—191, îndeosebi 155, 157, 189.

Predicativitatea conceptului este un caz particular al nesaturării sau nevoii de întregire a funcțiilor. Despre aceasta Frege vorbește ceva mai jos.

[7] Pentru Frege, deci, atunci cînd „este" nu exprimă relația de identitate și, ca atare, nu leagă între ele două nume proprii în

cadrul unei propoziţii de identitate, copula trebuie înglobată în expresia predicativă. Propoziţia singulară exprimă prin însăşi forma sa relaţia dintre un obiect şi un concept sub care primul cade, exprimă nemijlocit, aşadar, predicativitatea conceptului; ea se va scinda prin analiză logică, în două părţi: nume propriu şi expresie predicativă (predicat gramatical). Dacă în cadrul propoziţiei figurează „este" (particulă care, cum a arătat Frege, în unele cazuri poate lipsi), atunci copula va fi o parte a predicatului gramatical.

[8] Aşa cum se va preciza mai jos, expresia faptului că un concept cade sub un concept superior constituie sau o propoziţie singulară, în care subiectul gramatical va fi totuşi nu o denumire a primului concept, ci a unui obiect *ad-hoc*, sau o propoziţie în care primul concept este exprimat în această calitate, dar tocmai de aceea propoziţia nu mai exprimă o judecată singulară de forma celor studiate în logica tradiţională. În ceea ce priveşte subordonarea unui concept faţă de altul, ea se exprimă îndeobşte în forma unei propoziţii universale.

[9] Ca şi în „Despre sens şi semnificaţie", Frege distinge aici între sensul unei expresii şi nuanţele pe care diferite expresii sinonime le conferă, în diferite contexte dintr-o limbă dată, şi cu atît mai mult în diferite limbi, unuia şi aceluiaşi sens.

[10] În repetate rînduri, Frege vorbeşte despre imperfecţiunile logice ale limbii ca despre o sursă de erori pe care numai analiza logică adecvată şi utilizarea unui sistem de notaţii în genul unui *Begriffsschrift* le poate contracara. De data aceasta, situaţia paradoxală la care ajunge limbajul obişnuit nu pare a fi corectabilă: potrivit lui Frege, este vorba de a intui pe baza unor indicaţii metaforice impasul la care ajunge limba, înţelegerea cititorului venind în întîmpinarea sugestiilor avansate de filosof. Pe de altă parte, folosirea unui simbolism corect nu dă loc la asemenea impasuri. Acest gen de critică a limbajului anticipează demersul wittgensteinian din *Tractatus*.

[11] Frege ne va rămîne pînă la sfîrşit dator cu un răspuns la întrebarea — pe care poate că el însuşi nu şi-a pus-o: ce anume desemnează un nume propriu cum este „Conceptul *om*"? — Pornind de la exemplul furnizat mai sus de către Frege însuşi:

„Conceptul *om* nu este vid". Ignacio Angelelli (*op. cit.*, p. 171) avansează ipoteza că întrucît a nu fi vidă este proprietate a unei clase, denotatul necunoscut al expresiei „Conceptul F" este *clasa* corespunzătoare acelui concept.

[12] Trecînd la analiza celor patru forme de propoziţii categorice cu care se ocupă silogistica aristotelică, Frege îşi propune să arate că în cuprinsul lor termenii generali desemnează concepte; aceasta este valabil nu numai pentru termenul-predicat, ci şi pentru termenul-subiect (subiect, în accepţia tradiţională a cuvîntului). Mai întîi el arată că pretinsul subiect al unei propoziţii de forma „Toţi S sînt P" este în fapt predicat al unor obiecte indicate în mod indefinit, propoziţia transcriindu-se în „tot ce este S este P", sau „dacă ceva (orice) este S, atunci este P". În teoria cuantificării, formula care exprimă această înţelegere a funcţionării conceptelor în calitate de predicate, este de genul $(x)(S(x)\rightarrow P(x))$.

[13] Cf. mai sus, nota 6.

[14] Spre deosebire de propoziţiile singulare, care exprimă relaţia logică fundamentală de cădere a unui obiect sub un concept.

[15] Fapt pe care formalizarea unei asemenea propoziţii în logica predicatelor îl pune nemijlocit în evidenţă. Propoziţia „toate mamiferele sînt animale terestre" se exprimă printr-o formulă ca $(x)(S(x)\rightarrow P(x))$, iar negaţia acestei propoziţii este $\sim (x)(S(x)\rightarrow P(x))$.

[16] În propoziţia „Există cel puţin o rădăcină pătrată din doi" se enunţă ceva despre conceptul ***rădăcină pătrată din doi***, dar: 1) ceea ce se enunţă nu este exprimat printr-o expresie care ar fi predicatul gramatical al propoziţiei de mai sus, 2) acela despre care se enunţă nu este desemnat printr-un subiect gramatical şi 3) propoziţia de mai sus, în ansamblu, nu este de forma subiect-predicat. Lucrurile devin încă mai evidente dacă observăm o formulă ca $(\exists x)A(x)$, care descrie structura logică a tuturor propoziţiilor de aceeaşi formă ca a propoziţiei de mai sus: expresia care desemnează conceptul *despre care* se enunţă proprietatea existenţei îl desemnează tocmai ca pe un concept, dar îl desemnează înăuntrul unui întreg, iar *ceea ce se enunţă* despre acel concept nu este desemnat de un predicat gramatical. Aşadar,

se poate enunța ceva despre altceva, fără ca enunțul să lege un subiect gramatical cu un predicat propozițional.

În propoziția „Conceptul *rădăcină pătrată din 4* este realizat" distingem în schimb un subiect și un predicat, dar subiectul de aici nu desemnează conceptul despre care s-a enunțat ceva în prima propoziție iar predicatul nu desemnează ceea ce acolo se enunța, nu însă prin intermediul unei expresii predicative.

[17] În *Fundamentele aritmeticii* (cf. îndeosebi § 46), Frege stabilise că o aserțiune numerică enunță ceva despre un concept. În măsura în care „Una este Viena" („Viena este unică") este și o aserțiune numerică, ea spune că numărul care revine unui concept este unu.

[18] Argumentația lui Frege nu pare stringentă, cel puțin dacă ne ghidăm după intuiția lingvistică. Ar fi mai firesc să considerăm că o propoziție ca „Iulius Caesar este realizat" nu are sens, deși din punct de vedere sintactic este corect construită. Prin aceasta s-ar abandona însă presupoziția de bază a logicii fregeene, și anume admiterea unui domeniu al tuturor obiectelor. În momentul în care renunțăm la această presupoziție — sub presiunea paradoxelor — putem concede lesne că „este realizat" are sens numai atunci cînd se enunță despre concepte.

[19] Să însemne aceasta că „proprietate" și „concept" sînt expresii sinonime? Împărțirea fregeană a entităților extralingvistice și non-psihice în obiecte și funcții, conceptele și relațiile fiind cazuri de funcții, pare să sugereze imperios o asemenea concluzie. De asemenea, pledează în aceeași direcție faptul că cele două expresii pot fi utilizate ca sinonime în variate contexte, *salva veritate et sensu.* Nu însă în toate contextele! Spunem că un obiect *are* proprietăți, însă *cade* sub concepte; a spune că un obiect cade sub proprietățile sale este neobișnuit, dar a spune că un obiect *are* concepte frizează absurdul. Tot astfel, este impropriu să spunem că argumentele admit funcții; funcțiile, dimpotrivă, admit argumente. Uzul limbii ne atrage deja atenția asupra faptului că „proprietate" și „concept" nu sînt sinonime, dar că orice context în care apare una din expresii se poate parafraza într-un context (sinonim?) în care apare cealaltă, și anume într-un context nu neapărat de aceeași formă. A cunoscut Frege această

distincţie? El o utilizează în nenumărate rînduri (chiar şi în articolul de faţă, imediat mai jos) dar nu o menţionează ca atare. Oricum, dacă el nu a făcut caz de o asemenea distincţie, nici nu a abuzat în direcţie platoniciană de umbrirea ei. Conceptele şi obiectele sînt două genuri de entităţi, însă nu două genuri de realităţi.

[20] „Proprietate" şi „notă" nu sînt entităţi distincte; clarificarea semnificaţiei acestor expresii impune considerarea contextelor în care apar. Se ajunge la concluzia că distincţia între proprietate şi notă, în opoziţie cu aceea între concept şi obiect, este legată de distincţia între două relaţii logice în care intră un acelaşi concept.

[21] *Logische Gleichung:* ecuaţie logică. În fapt, o propoziţie de identitate.

[22] Dificultatea nu constă în aceea că conceptul nu poate fi denumit; contra acestei interpretări se poate aminti că, potrivit lui Frege, un termen conceptual, un nume de concept („Begriffswort", *nomen appelativum,* „Begriffszeichen") desemnează conceptul ca atare (şi nu sfera acestuia). Dificultatea se manifestă în faptul că atunci cînd, de exemplu, spunem „conceptul *Cal* este predicativ" vorbim despre un obiect, în pofida intenţiei de a ne referi la un concept, expresia „conceptul *Cal*" fiind *nomen proprium* nu *nomen appelativum.* Într-un cuvînt, dificultatea rezidă în faptul că încercăm a desemna un concept prin intermediul unui subiect gramatical. Un asemenea obstacol nu este însă insurmontabil; pasul pe care cititorul este convocat să-l facă în întîmpinarea lui Frege constă în a evita emiterea unor propoziţii ca aceea de mai sus; putem *menţiona* un concept determinat numai printr-o expresie predicativă, dar nu-i putem atribui predicatul predicativităţii aşa cum un predicat s-ar atribui unui subiect logic, desemnat de un subiect gramatical. Predicativitatea unui anume concept se manifestă direct în *utilizarea* lui, iar *exprimarea* predicativităţii acelui concept trebuie ocolită, evitînd îmbrăcarea ei în forma propoziţiei singulare. O putem totuşi exprima indirect, de exemplu constatînd că expresia predicativă desemnează respectivul concept în contextul unor propoziţii.

Totodată, se observă că propozițiile „orice concept este un concept", „orice concept este predicativ" ș.a. sînt scutite de asemenea dificultăți. Spre deosebire de „Conceptul *Cal*", „Concept" este el însuși un nume predicativ, se poate folosi cu articolul nehotărît, desemnează o funcție. Trebuie să ne abținem însă de la inferarea unei propoziții singulare cum este „Conceptul *Cal* este un concept": *non sequitur*. A vorbi deci despre predicativitatea, nesaturarea conceptului *în genere* nu conduce la vreo dificultate deosebită; impasul trebuie localizat la nivelul cazurilor particulare, al fiecărui concept în parte.

[23] În nesaturare, predicativitate, nevoia de întregire a conceptului, F. Kaulbach sesizează pe drept cuvînt „pătrunderea unei anumite intenționalități în teritoriul logicii", o anumită atenuare a distincției rigide pe care Frege o trasează între realitatea muabilă și conținut logic pur identic sieși, gînd. Caracterizarea fregeană a conceptului ca funcție, ca element „nesaturat" și „cerînd o întregire" îl prezintă „ca pe un gen de energie logică (ἐνέργεια în sensul lui Aristotel)". „Conceptul — scrie în continuare F. Kaulbach — „cere" o întregire, așa cum, bunăoară, predicatul „. . . este un număr prim" aspiră după un subiect de felul lui „trei". De predicat se leagă o intenție, care permite legarea inteligibilă a subiectelor potențiale ale propozițiilor întru unitatea unui gînd, așa cum acesta își găsește în propoziția „trei este un număr prim" exprimarea sa. Prin aceasta însă, operațiile unificatoare ale subiectului se dovedesc, în însuși domeniul de vîrf al logicii, de neevitat" (F. Kaulbach, *Einleitung, III: Der neue Ansatz und die geometrische Erkenntnisquelle*, în: Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, vol. I, p. XXIX).

CE ESTE O FUNCȚIE?

NOTIŢĂ INTRODUCTIVĂ

Grăbiţi, de obicei, să ajungă la rezultate, matematicienii nu stăruie asupra începuturilor; obţinerea unor teoreme fructuoase asupra funcţiilor, de pildă, rămîne pentru unii singura activitate importantă — covîrşitor mai importantă decît elucidarea semnificaţiei cuvîntului „funcţie". Aceasta este valabil şi pentru „variabilă", „număr", „spaţiu". Investigarea fundamentelor matematicii a atras însă atenţia că efortul de lămurire a începuturilor este în măsură cel puţin să *rafineze* consumul şi producţia de adevăruri matematice, dacă nu chiar să-l potenţeze puternic. Şi totuşi, contrastul dintre tendinţa de lărgire şi tendinţa de adîncire însoţeşte constant matematica de azi, nu mai puţin ca aceea de ieri.

Demersul acestui mic eseu fregean stă sub semnul mentalităţii acelor matematicieni cărora nici demonstraţiile cele mai glorioase nu le aduc deplina satisfacţie, cît timp nu sînt întovărăşite de clarificarea noţiunilor fundamentale.

Clarificare, şi nu definire propriu-zisă; fiindcă, pentru Frege, ideea de „funcţie" este indefinibilă, ca logic-elementară. Dar în jurul unei idei primare, în absenţa unei definiţii, se pot crea confuzii, după cum, pe de altă parte, este loc şi pentru lămuriri fundamentale.

Frege critică unele confuzii comune, asociate de folosirea cuvintelor „variabilă" şi „funcţie" în matematici. Manualele moderne din ziua de azi aflate sub semnul teoriei mulţimilor au reuşit să le înlăture, dar dicţionarele de uz curent le mai păstrează încă, semn al înrădăcinării lor profunde. Atunci cînd Frege discută, deci, explicaţiile aduse de matematicianul E. Czuber, trebuie subînţeles faptul că el critică explicaţiile uzuale ale acestor noţiuni.

Observaţiile pe care le face Frege sînt în primul rînd de ordin strict *logic* şi au valoarea unei paradigme pentru activitatea logicianului: ele vizează folosirea cuvintelor cu o rigoare cît mai mare, în aşa fel încît conotaţiile intuitive ale cuvintelor să justi-

fice efectiv punerea lor în joc. Sugestiile ademenitoare care într-un fel „rimează" cu conţinutul chestionat dar în fapt îl redau inadecvat, trebuie înlăturate. Astfel, cuvîntul „variabilă" a fost sugerat de aplicaţiile practice ale analizei, abstras din studiul *mărimilor variabile,* însă asociaţia între cuvintele „variabilă" şi „variaţie" întunecă esenţa matematică a chestiunii, sugerînd în mod nefericit că ar exista „numere variabile", aşa cum există într-adevăr mărimi variabile şi aşa cum există, pe de altă parte, expresii cu semnificaţie variabilă, în dependenţă de contextul utilizării lor.

La fel, esenţa funcţiei va trebui desprinsă cu grijă din agregatul haotic al explicaţiilor care amestecă înţelesuri deosebite, confundînd expresia funcţiei cu expresia valorii funcţiei pentru un argument nedeterminat, sau confundînd şirul valorilor unei funcţii pentru argumente distincte cu variaţia unei entităţi matematice, sau, în fine, expresia funcţiei cu însăşi funcţia etc. Această esenţă rezidă în punerea în corespondenţă potrivit unei legi. Iar cuvîntul lege — atrage atenţia Frege — „indică tocmai generalitatea". Aşadar, o funcţie nu este un număr, de pildă, sau vreo altă entitate cu caracter obiectual.

Tentativele confuze de explicare împotriva cărora Frege îşi îndreaptă ascuţişul observaţiilor sale îşi trag obîrşia din lacune — pe care le şi alimentează — ale notaţiei curente pentru funcţii. În notaţia pentru funcţii se poate întrezări totuşi esenţa veritabilă a funcţiei ca entitate nu variabilă, însă „nesaturată". Iar aici, explicaţiile lui Frege se suprapun acelora pe care eseurile anterioare „Funcţie şi concept", „Despre concept şi obiect" ni le-au făcut deja familiare, ele culminînd cu pledoaria în favoarea unei ideografii apte să redea articulaţiile logice ale îmbinării funcţiei cu argumentul.

În comparaţie cu cele două articole amintite mai sus, eseul lui Frege subliniază şi precizează conceperea esenţei funcţiei ca *punere în corespondenţă potrivit unei legi a tuturor obiectelor* faţă de unele (în cazul funcţiilor de treapta întîi, de un argument). Demersul lui Frege clarifică o idee pusă deja în circulaţie în prima jumătate a secolului trecut de către matematicianul Dirichlet, idee aşezată pe fundamente mai abstracte prin înţelegerea modernă a funcţiei ca aplicaţie (Dedekind, 1886). Dar o deo-

sebire adîncă, ireductibilă, subzistă: pentru Frege, noțiunea de *funcție* aparține logicii, nu unei teorii a claselor sau a mulțimilor. Așa cum scrie Jean Largeault: „După Dirichlet, o funcție era o «lege de corespondență» între elementele a două clase. Frege respinge această concepție, întrucît ea presupune admiterea anteriorității claselor față de funcții. Frege utilizează, dimpotrivă, funcțiile pentru a defini clasele și acceptă funcțiile în sistemul său ca entități indefinibile și inanalizabile" (Jean Largeault, *Logique et philosophie chez Frege*, Paris-Louvain, 1970, p. 470). Logicizarea funcției impune ca ea să fie peste tot definită, adică să admită orice argument din domeniul universal al obiectelor, ceea ce conferă abordării fregeene o anumită rigiditate.

CE ESTE O FUNCŢIE?[1]

Semnificaţia cuvîntului „funcţie"* în analiză nu este nici astăzi mai presus de orice dubiu, cu toate că acest cuvînt este folosit de multă vreme pe scară largă. În definiţii întîlnim două expresii care se repetă mereu, uneori combinate iar alteori în mod separat, şi anume aceea de expresie a calculului şi aceea de variabilă. Se observă, de asemenea, fluctuaţii ale accepţiei acestui termen, prin funcţie înţelegîndu-se cînd ceea ce determină modul de dependenţă — sau poate modul de dependenţă însuşi —, cînd variabila dependentă.

De la o vreme, cuvîntul „variabilă" este preponderent în definiţii. Dar însuşi acest cuvînt reclamă imperios o explicaţie. Orice variaţie decurge în timp. În consecinţă, analiza ar avea de-a face cu un proces temporal, întrucît ia în consideraţie variabile. În fapt însă, analiza nu are de-a face cu timpul; aplicabilitatea sa la fenomenele temporale este irelevantă pentru esenţa chestiunii. Analiza are aplicaţii şi în geometrie, unde timpul nu intră deloc în consideraţie. Aceasta este una din principalele dificultăţi pe care le întîmpinăm în mod repetat, ori de cîte ori vrem să mergem de la exemple la însăşi esenţa chestiunii. Într-adevăr, de îndată ce încercăm să indicăm o variabilă, ne vom ciocni de ceva ce variază în timp şi ca atare nu aparţine analizei pure[2]. Şi totuşi, dacă în genere variabilele sînt obiecte ale analizei, trebuie să putem prezenta o variabilă care nu presupune nici un element străin aritmeticii.

Dacă însăşi variaţia suscită, aşadar, o dificultate, o nouă dificultate ne întîmpină de îndată ce ne întrebăm ce anume variază. Răspunsul pe care îl căpătăm mai întîi este: o mărime. Să căutăm un exemplu. Putem spune că

* Discuţia noastră se va limita la funcţii de un singur argument.

o bară constituie o mărime, dat fiind că este lungă. Orice variație pe care o suferă bara sub raportul lungimii sale, de exemplu prin încălzirea ei, se petrece în timp; or, nici barele, nici lungimile nu sînt obiecte ale analizei pure. Această tentativă de a indica o mărime variabilă înăuntrul analizei se soldează cu un eșec; și exact în același fel sînt condamnate la eșec mai multe tentative; într-adevăr, mărimile lungimilor, suprafețelor, unghiurilor, maselor nu sînt nici ele obiecte ale aritmeticii. Dintre toate mărimile, aritmeticii îi aparțin numai numerele. Or, această știință omite să specifice prin măsurarea căror mărimi au fost obținute numerele în cazurile particulare și tocmai de aceea aritmetica admite cele mai variate aplicații. Întrebarea noastră este atunci: sînt oare variabilele analizei numere variabile? Ce altceva ar putea fi ele, de vreme ce în genere ele trebuie să aparțină analizei? Cum se face însă că aproape niciodată nu spunem „număr variabil“, dar, pe de altă parte, spunem adesea „mărime variabilă“? Această din urmă expresie pare mult mai acceptabilă decît „număr variabil“; într-adevăr, privitor la ultima expresie se ridică întrebarea: există oare numere variabile? Oare fiecare număr în parte nu-și conservă fără variație proprietățile sale? Ni se va replica, desigur, că 3 și π sînt în mod evident numere invariabile, sînt constante, dar mai există și numere variabile. Atunci, de exemplu, cînd vorbesc despre „numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare“, eu desemnez un număr, iar acesta este o variabilă, deoarece bara nu-și păstrează întotdeauna aceeași lungime; așadar, folosind aceeași expresie, eu am desemnat un număr variabil. Să comparăm exemplul de mai sus cu următorul. Atunci cînd spun „regele acestei țări“ eu desemnez un om. Acum zece ani, regele acestei țări era un bătrîn, iar acum regele acestei țări este un tînăr. Așadar, cu această expresie am desemnat un om care era un bătrîn, iar acum este un tînăr. Aici trebuie să fie o eroare. Expresia „regele acestei țări“ fără menționare a timpului nu desemnează în genere vreun om; dacă însă se adaugă o mențiune temporală ea poate *desemna* în

mod univoc un anumit om; dar atunci, această menţiune temporală este un element constitutiv necesar al expresiei iar pentru o menţiune diferită a timpului vom obţine o expresie diferită. Aşadar, cele două propoziţii ale noastre nu au nicidecum acelaşi subiect al enunţării. La fel, expresia „numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare" nu desemnează în genere nici un număr, în absenţa menţiunii temporale. Dacă se adaugă o menţiune temporală, se poate desemna astfel un număr, de pildă numărul 1 000; acesta este însă invariabil. O altă menţiune temporală produce o expresie diferită, care poate acum să desemneze un număr diferit, să spunem 1 001. Dacă spunem: „Acum o jumătate de ceas numărul care dădea lungimea în milimetri a acestei bare era un număr cub; în clipa de faţă, numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare nu este cub", subiectul enunţării noastre nu este unul şi acelaşi[3]. Numărul 1 000 nu a crescut pînă la 1001, ci a fost înlocuit prin acesta din urmă. Sau poate că numărul 1000 va fi fiind acelaşi cu numărul 1001, numai că şi-a schimbat înfăţişarea? Dacă ceva variază, noi avem în acelaşi obiect o succesiune de proprietăţi, de stări diferite. Dacă acel ceva nu ar fi acelaşi, nu am avea un subiect despre care să putem enunţa variaţia. O bară se dilată prin încălzire. În cursul acestui proces ea rămîne aceeaşi. Dacă, în schimb, o vom scoate şi o vom înlocui printr-o bară mai lungă, nu am putea spune că s-a dilatat. Un om îmbătrîneşte; dar dacă nu l-am putea recunoaşte totuşi ca pe un acelaşi om nu am avea nimic despre care să putem enunţa îmbătrînirea. Să aplicăm acestea în cazul numărului. Ce anume rămîne acelaşi, atunci cînd un număr variază? Nimic! Aşadar, un număr nu variază; într-adevăr, nu avem nimic despre care am putea enunţa variaţia[4]. Un număr cub nu se transformă niciodată într-un număr prim, iar un număr iraţional nu devine niciodată raţional.

Aşadar, nu există număr variabil, ceea ce este confirmat şi de faptul că nu avem nume proprii pentru numere variabile. Încercarea noastră de a folosi expresia

„numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare" ca o denumire a unui număr variabil a dat greș. Dar nu folosim noi oare „x", „y", „z" pentru a desemna numere variabile? Acest mod de a vorbi este într-adevăr răspîndit; dar literele de mai sus nu sînt nume proprii ale unor numere variabile în modul în care „2" și „3" sînt nume proprii ale unor numere constante; într-adevăr, numerele 2 și 3 se deosebesc între ele într-un anume mod, pe care îl putem indica precis; prin ce se disting însă variabilele despre care s-a pretins că sînt desemnate prin „x" și „y"? Iată ce nu putem spune. Nu putem indica proprietățile pe care le are x, nici proprietățile deosebite pe care le are y. Dacă în genere asociem ceva acestor litere, aceeași reprezentare vagă va corespunde ambelor. Acolo unde apar pretinse deosebiri este vorba de aplicații; dar în cazul de față nu ne referim la acestea. Întrucît nu putem concepe fiecare variabilă în specificitatea ei, nu putem nici să atribuim variabilelor nume proprii.

Domnul E. Czuber[5] a încercat să preîntîmpine unele din dificultățile pe care le-am semnalat*. Pentru a elimina timpul, el definește variabila ca un număr nedeterminat. Dar există oare numere nedeterminate? Putem oare împărți numerele în determinate și nedeterminate? Oare oameni nedeterminați există? Nu se cere ca orice obiect să fie determinat? Dar oare nu este nedeterminat numărul n? — Eu nu cunosc numărul n. „n" nu este numele propriu al vreunui număr, determinat sau nedeterminat[6]. Și totuși, uneori vorbim despre „numărul n". Cum este cu putință aceasta? O asemenea expresie trebuie considerată într-un context. Să luăm un exemplu: „dacă numărul n este par, atunci $\cos n\pi=1$". Aici, numai întregul are un sens, nu condiția luată în sine sau consecința luată în sine. La întrebarea dacă numărul n este par nu se poate răspunde; la fel, nu se poate răspunde la întrebarea dacă $\cos n\pi=1$. Pentru a se da un răspuns, s-ar cere ca „n" să fie numele propriu al unui număr, iar

* *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung* (Teubner, Leipzig), 1, § 2.

atunci acest număr ar fi în mod necesar un număr determinat. Noi scriem litera „*n*“ pentru a viza generalitatea[7]. Aceasta presupune ca, înlocuind-o prin numele unui număr, atît propoziția-condiție cît și propoziția-consecință să primească un sens[8].

Fără îndoială, putem vorbi aici despre nedeterminare; dar „nedeterminat“ nu este aici un adjectiv pentru „număr“, ci este un adverb, de exemplu pentru verbul „a indica“. Nu se poate spune că „*n*“ desemnează un număr nedeterminat, dar putem spune într-adevăr că el indică în mod nedeterminat numere. Și așa se întîmplă ori de cîte ori sînt folosite în aritmetică litere, cu excepția puținelor cazuri (π, *e*, *i*) cînd acestea intervin în calitate de nume proprii; dar atunci ele desemnează numere determinate invariabile. Prin urmare, nu există numere nedeterminate, iar tentativa în acest sens a domnului Czuber constituie un eșec.

În al doilea rînd, el încearcă să remedieze deficiența legată de faptul că nu putem concepe fiecare variabilă în parte într-un mod specific. El numește totalitatea valorilor pe care le poate lua o variabilă domeniul variabilei, și spune: „Variabila x contează ca definită dacă pentru orice număr real pe care îl indicăm se poate determina dacă acesta aparține sau nu domeniului ei“. Variabila contează ca definită; dar este ea într-adevăr așa? Întrucît nu există numere nedeterminate, să definim un număr nedeterminat e o imposibilitate. Domeniul este prezentat ca notă distinctivă a variabilei; dar atunci, pentru același domeniu ar trebui să avem aceeași variabilă. În consecință, în ecuația „$y=x^2$“, y ar fi aceeași variabilă ca și x, în cazul cînd domeniul lui x ar fi cel al numerelor pozitive[9].

Trebuie să considerăm că această tentativă eșuează, cu atît mai mult cu cît expresia „o variabilă primește o valoare“ este cu totul nebuloasă. O variabilă trebuie să fie un număr nedeterminat. Or, cum ajunge un număr nedeterminat să primească un număr, de vreme ce, așa cum am văzut, valoarea este un număr? Nu cumva un

om nedeterminat primeşte şi el un om determinat? În alte privințe, într-adevăr, noi spunem că un obiect primeşte o proprietate; aici, numărul trebuie să joace ambele roluri; în calitate de obiect, el este numit variabilă sau mărime variabilă, iar în calitate de proprietate el este numit valoare. De aceea, oamenii preferă cuvîntului „număr“ cuvîntul „mărime“, iluzionîndu-se în privința faptului că mărimea variabilă şi valoarea pe care, așa cum se pretinde, cea dintîi o primește, ar fi în esență unul și același lucru, că în acest caz nu am obținut un obiect care primește succesiv diferite proprietăți și că de aceea nu poate fi vorba despre o variație.

În ceea ce priveşte variabilele, rezultatele noastre sînt următoarele. Mărimile variabile trebuie desigur admise, însă ele nu aparțin analizei pure. Numere variabile nu există. Cuvîntul „variabilă“ nu are astfel o justificare în analiza pură.

Cum ajungem acum de la variabilă la funcție? În esență, lucrurile se vor petrece întotdeauna la fel şi de aceea vom urma expunerea domnului Czuber, care scrie (§ 3):

„Dacă oricărei valori a variabilei reale x care aparține la domeniul acesteia i-am pus in corespondență un număr determînat y, atunci y în general este de asemenea definit ca variabilă și numit *funcție de variabila reală* x. Această situație se exprimă printr-o ecuație de forma y f(x)“[10].

Observăm mai întîi că y este numit număr determinat, în timp ce, pe de altă parte, fiind o variabilă, el trebuia să fie un număr nedeterminat. Dar y nu este un număr nici determinat, nici nedeterminat; numai semnul „y“ a fost ataşat în mod incorect unei pluralități de numere, iar după aceea se vorbește despre el ca și cum ar fi un număr unic. Mai simplu şi mai clar ar fi să prezentăm lucrurile după cum urmează: fiecărui număr dintr-un domeniu al lui x i se pune în corespondență un număr; totalitatea acestor numere o numesc domeniul lui y. Natural, avem aici un domeniu al lui y, dar nu avem un y

despre care să putem spune că ar fi o funcţie de variabila reală x.

Aşadar, delimitarea domeniului apare a fi neesenţială în raport cu esenţa funcţiei. Dar atunci de ce nu am adopta din capul locului ca domeniu totalitatea numerelor reale sau totalitatea numerelor complexe, inclusiv numerele reale? Miezul problemei se află însă cu totul în altă parte, şi anume, este ascuns în cuvîntul „pus în corespondenţă". Într-adevăr, cum pot să constat dacă numărul 5 este pus în corespondenţă cu numărul 4? Întrebarea nu poate primi răspuns, dacă nu o întregim într-un fel sau altul. Şi totuşi, potrivit explicaţiei pe care o dă domnul Czuber, lucrurile se prezintă ca şi cum pentru oricare două numere era determinat din capul locului, dacă primul este sau nu este pus în corespondenţă cu al doilea. Din fericire, domnul Czuber adaugă următoarea observaţie:

„Definiţia de mai sus nu afirmă nimic cu privire la *legea* de corespondenţă, lege care este indicată în modul cel mai general de *caracteristica f;* această lege poate fi stabilită în cele mai diverse moduri".

Aşadar, punerea în corespondenţă are loc conform unei legi şi se pot concepe diferite legi de acest fel. Dar atunci expresia „y este funcţie de x" nu are nici un sens dacă nu este întregită prin menţionarea legii după care decurge punerea în corespondenţă. Aceasta constituie o eroare în definiţie. Or, tocmai legea pe care această definiţie o prezintă ca nefiind dată este lucrul principal. Observăm că acum variabilitatea a dispărut în întregime din cîmpul vederii noastre, în timp ce generalitatea intră în raza atenţiei noastre; într-adevăr, cuvîntul „lege" indică tocmai generalitatea[11].

Deosebirile dintre legile de punere în corespondenţă vor fi legate de deosebirile dintre funcţii şi ele nu mai pot fi înţelese ca fiind de ordin cantitativ. Este suficient să ne gîndim la funcţiile algebrice, la funcţia logaritm, la funcţiile eliptice, spre a ne convinge că aici sînt puse în joc deosebiri calitative[12]; un motiv în plus pentru a nu de-

fini funcțiile ca variabile. Dacă ele ar fi variabile, funcțiile eliptice ar fi variabile eliptice.

Modul nostru general de a exprima o atare lege de punere în corespondență este o ecuație în care litera „y“ stă în partea stîngă, în timp ce în partea dreaptă apare o expresie matematică compusă din numere, semne de calcul și litera „x“, cum ar fi:

$$„y = x^2 + 3x"$$

Funcția a fost definită, într-adevăr, ca fiind o asemenea expresie de calcul. În ultimul timp s-a considerat că acest concept este prea restrîns[13]. Dar inconvenientul semnalat ar putea fi evitat cu ușurință prin introducerea unor noi semne în limbajul simbolic al aritmeticii. Mai greu cîntărește o altă obiecție: fiind un grup de semne, o expresie a calculului nici nu aparține aritmeticii. Teoria formală care prezintă semnele ca fiind obiectul acestei științe o pot considera ca fiind definitiv infirmată de critica mea din volumul doi al cărții mele *Grundgesetze der Arithmetik*[14]. Distincția dintre semne și lucrul semnificat nu a fost întotdeauna trasată precis, astfel că prin expresie a calculului (*expressio analytica*) s-a înțeles pe jumătate și ceea ce constituie semnificația expresiei. Or, ce desemnează „x^2+3x“? Strict vorbind, nimic; într-adevăr, litera „x“ nu face decît să indice numere, dar nu le și desemnează. Dacă înlocuim „x“ cu un numeral obținem o expresie care desemnează un număr, și astfel nu avem nimic nou. Ca și „x“ însuși, „x^2+3x“ nu face decît să indice. Aceasta poate avea loc în scopul exprimării generalității, așa cum se întîmplă în cazul propozițiilor

$$„x^2 + 3x = x\cdot(x + 3)",$$
$$„\text{dacă } x > 0, \text{ atunci } x^2 + 3x > 0".$$

Dar cum rămîne atunci cu funcția? Lucrurile se prezintă ca și cum funcția nu s-ar putea înțelege nici ca însăși expresia de calcul și nici ca ceea ce constituie semnificația expresiei. De fapt însă nu ne-am abătut prea

mult de la drumul cel drept. Fiecare din expresiile „sin 0", „sin 1", „sin 2" semnifică un anumit număr; dar avem o parte constitutivă comună „*sin*", în care constatăm că a fost desemnată esenţa proprie a funcţiei sinus. Acest „*sin*" ar corespunde acelui „*f*" despre care domnul Czuber spune că ar indica legea, trecerea de la „*f*" la „*sin*", ca şi aceea de la „*a*" la „2", fiind o trecere de la un semn care indică la un semn care desemnează. Dacă ar fi aşa, atunci „*sin*" ar semnifica o lege. Natural, lucrurile nu stau întocmai aşa. Legea ni se pare a fi exprimată mai curînd în ecuaţia „$y = sin\ x$", în cadrul căreia „*sin*" este numai o parte, deşi este tocmai partea care denotă particularitatea deosebită a legii în cauză. Oare nu tocmai aici avem ceea ce căutam — funcţia? Aşadar, strict vorbind, „*f*" va indica, de asemenea, o funcţie. Aici, ajungem la ceea ce deosebeşte funcţiile de numere[15]. „*Sin*" cere o întregire cu semnul unui număr, dar acest din urmă semn nu constituie o parte a desemnării funcţiei. Aceasta este valabil în general: semnul unei funcţii este nesaturat, el cere să fie întregit prin semnul unui număr, pe care îl numim deci semnul argumentului. Acelaşi lucru îl constatăm şi în cazul semnului radical, în cazul semnului logaritm. Semnele de funcţie, spre deosebire de semnele numerelor, nu pot să figureze în mod izolat într-o parte a unei egalităţi, ci numai atunci cînd sînt întregite printr-un semn care desemnează sau indică un număr. Dar ce semnifică oare o asemenea combinaţie formată din semnul unei funcţii şi semnul unui număr, de ex. „sin 1", „ $\sqrt{1}$", „log 1"? De fiecare dată, un număr. Obţinem astfel semne ale numerelor compuse din două părţi neasemănătoare, partea nesaturată fiind întregită prin cealaltă parte.

Această nevoie de întregire poate fi pusă în evidenţă prin folosirea parantezelor; fie, de exemplu, „sin (   )" sau „$(\ )^2 + 3 \cdot (\ )$". Deşi este notaţia cea mai adecvată, cea care permite cel mai bine evitarea confuziei care provine din considerarea semnului argumentului drept o parte a semnului funcţiei, probabil că notaţia de mai sus nu

va fi acceptată*. În acelaşi scop se poate folosi şi o literă. Dacă alegem „ξ", atunci „sin ξ" şi „$\xi^2 + 3 \cdot \xi$" sînt semne de funcții. Dar în acest caz trebuie stipulat că singurul oficiu pe care îl îndeplineşte aici „ξ" este acela de a arăta locurile unde trebuie inserate semnele întregitoare[16]. Va fi indicat să nu folosim această literă într-un alt scop, de pildă să n-o folosim în locul lui „x" din exemplele noastre, unde ea serveşte la exprimarea generalității.

Un defect al notației curente pentru cîtimile diferențiale îl constituie faptul că, în cadrul ei, litera „x" serveşte atît pentru a arăta locurile argumentului cît şi pentru a exprima generalitatea, ca în ecuația

$$„\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}"$$

Din acest motiv se naşte o dificultate. Conform principiilor generale de folosire a literelor în aritmetică, ar trebui să obținem un caz particular atunci cînd în „x" substituim semnul unui număr. Dar expresia

$$„\frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}"$$

este ininteligibilă, întrucît nu ne permite să identificăm funcția. Nu ştim dacă funcția în cauză este

$$\cos\frac{(\,)}{2}, \text{ sau este } \cos\frac{2}{(\,)} \text{ sau este } \cos\frac{(\,)}{(\,)}.$$

De aceea, sîntem siliți să folosim notația greoaie

$$„\left(\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}\right)_{x=2}"$$

* În orice caz notația este destinată numai pentru cazul excepțional, cînd dorim să desemnăm o funcție luată izolat. În „*sin 2*", „*sin*" izolat desemnează deja funcția.

Însă cel mai mare inconvenient este, de bună seamă, acela, că devine astfel mult mai greu să întrezărim natura funcției.

Trăsătura caracteristică a semnelor de funcții pe care am numit-o aici nesaturare își găsește, desigur, un corespondent în cazul funcțiilor înseși. Acestea din urmă pot fi numite de asemenea nesaturate și în acest mod noi marcăm deosebirea fundamentală dintre ele și numere. Natural, aceasta nu este o definiție; dar o definiție nu este posibilă nici în cazul de față*. Mă văd nevoit a mă limita la indicarea ideii mele cu ajutorul unei expresii metaforice și mă bizui pe consimțămîntul cititorului de a-mi ieși în întîmpinare, la jumătatea drumului[17].

Dacă o funcție este întregită printr-un număr astfel încît să dea un număr, acesta din urmă se va numi valoarea funcției pentru primul număr ca argument. Oamenii s-au obișnuit să citească egalitatea „$y=f(x)$" ca „y este o funcție de x". Aici avem două greșeli: în primul rînd, semnul egalității este înțeles ca o copulă; în al doilea rînd se confundă funcția cu valoarea ei pentru un argument. Aceste greșeli conduc la părerea că funcția ar fi un număr, chiar dacă numai un număr variabil sau nedeterminat. Noi am văzut însă că asemenea numere nu există în genere și că funcțiile se deosebesc în mod fundamental de numere[18].

Tendința spre concizie este responsabilă pentru introducerea mai multor expresii inexacte în limbajul matematic iar acestea au sfîrșit prin a face obscur gîndul și prin a produce definiții eronate. Matematica este menită să constituie un model de claritate logică. În fapt însă, în scrierile nici unei științe nu se pot întîlni, probabil, atît de multe expresii eronate și, ca o consecință, atît de multe gînduri eronate, ca în scrierile de matema-

---

* Definiția dată de H. HANKEL în *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (Universitätsprogramm, Tübingen, 1870), § 1, nu este de nici un folos, din cauza unui cerc vicios; ea conține expresia „$f(x)$", iar aceasta face ca definiția lui să presupună lucrul care urmează a fi definit.

tică. Corectitudinea logică nu trebuie sacrificată niciodată în favoarea conciziei expresiei. De aceea este extrem de important să se creeze un limbaj matematic în măsură să îmbine rigoarea maximă cu cea mai mare concizie posibilă. În acest scop, notaţia cea mai indicată va fi, de bună seamă, o notaţie conceptuală, un ansamblu de reguli conform cărora să putem exprima direct gîndurile în simboluri scrise sau tipărite fără mijlocirea limbajului sonor.

NOTE

[1] În original, articolul poartă titlul „Was ist eine Funktion?" şi a apărut în volumul omagial *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, Ambrosius Barth, Leipzig, 1904, pp. 656—666.

[2] Frege nu ignoră originea istorică a analizei, dar consideră că fundarea logică a disciplinelor matematice trebuie să facă abstracţie de geneza şi aplicabilitatea acestora. Poziţia sa în această privinţă este exprimată desluşit într-o recenzie pe care o publică în 1885 (*Rezension von: H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*, Berlin, 1883, în: „Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik", *87*, 1885, pp. 324—329). Frege aduce cărţii discutate obiecţia că în ea „nu se face în mod suficient distincţia între elementul aritmetic şi aplicările acestuia în geometrie şi mecanică. În esenţă, calculul infinitesimal este pur aritmetic iar definiţia sau justificarea conceptelor sale fundamentale nu trebuie să recurgă la geometrie sau mecanică chiar dacă punctul de pornire istoric se află în probleme de ordin geometric şi mecanic" (*apud* Frege, *Kleine Schriften*, 1969, p. 101).

[3] Consideraţiile de aici anticipează studiul designatorilor nonrigizi, expresii care capătă referinţe diferite în variate contexte de referinţă. Analiza unor asemenea expresii a căpătat o amploare deosebită în ultimul deceniu, semantica lumilor posibile găsindu-şi acolo un domeniu privilegiat de aplicare.

[4] Spre deosebire de obiectele fizice, obiectele ideale de felul numerelor nu admit variaţie. La fel, spune în altă parte Frege, conceptele în genere nu admit variaţie şi nu au un istoric propriu-zis; putem vorbi doar despre un istoric al tentativei de aprehendare a conceptului (a se vedea articolul lui Frege, „Über das Trägheitsgesetz", publicat în 1891 şi retipărit în *Kleine Schriften*, pp. 113—124; îndeosebi cf. p. 122).

[5] E. Czuber, matematician german, ale cărui cursuri de analiză au circulat la începutul secolului nostru.

[6] Așadar, litera *n* funcționează în cazul de față în calitate de variabilă legată. Așa cum Frege subliniază în repetate rînduri, principala utilizare a literelor latine în matematică este utilizarea lor nu în calitate de nume proprii, ci pentru a conferi propoziției generalitatea conținutului. În acest caz, litera indică în mod nedeterminat.

[7] Strict vorbind, expresia „dacă numărul *n* este par, atunci cos $n\pi = 1$" nu are sens decît cu condiția subînțeleasă că este prescurtarea enunțului: „pentru orice *n*, dacă numărul *n* este par, etc.". În terminologia ulterioară a lui Frege, expresia citată este „uneigentliche Satz", o propoziție improprie, o expresie avînd forma unei propoziții dar care nu comunică un gînd; această expresie este însă partea unui complex propozițional (Satzgefüge) care exprimă un gînd; totodată, expresia — care este, cum spunem azi, o „formă propozițională" — poate căpăta un sens și pe calea indicată de Frege, adică înlocuind *n* prin numele unui număr. Potrivit terminologiei astăzi în uz, în „dacă numărul *n* este par atunci... etc.", litera *n* este utilizată în calitate de variabilă liberă, admite substituirea unei constante individuale în cuprinsul expresiei; dimpotrivă, în „pentru orice *n*, dacă numărul *n* este par, atunci...etc." litera *n* funcționează ca variabilă legată, servind la indicarea generalității.

[8] Cum scrie Alonzo Church: „... concepem variabila ca fiind asociată cu un anumit domeniu nevid de valori posibile, pe care-l vom denumi *domeniul* variabilei. De aceea, în conținutul variabilei sînt cuprinse tipurile de conținuturi care aparțin unui nume propriu din domeniu. Dar o variabilă nu trebuie identificată cu un nume propriu al domeniului ei, deoarece există și deosebiri de conținut între aceste două". Church adaugă: „Se poate vedea ușor, din punctul de vedere al uzului matematic obișnuit al variabilelor, că o astfel de identificare este imposibilă. Căci două nume proprii dintr-un domeniu sînt reciproc substituibile, dacă au doar același sens; însă două variabile distincte trebuie să rămînă distincte, chiar dacă au același domeniu, determinat de același concept" (din *Introducere în logica matematică*, în culegerea *Logică și filozofie*, Ed. Politică, 1966, p. 156).

[9] Explicaţia veche pe care Frege o combate ca intenabilă mai are curs şi astăzi, ea migrînd dintr-un manual în altul, dintr-un dicţionar în altul. Cităm cu titlu de exemplu: „VARIABIL(ă)... (Mat.). *Cantităţi* (sau *mărimi*) *variabile* = cantităţi (sau mărimi) susceptibile de a-şi schimba valoarea faţă de altele, care rămîn constante. (Mat.; substantivat, f.) Cantitate care ia succesiv diferite valori (în cursul unui calcul)" (*Dicţionarul Explicativ al Limbii Române*, 1975).

[10] Definiţia provine în esenţă de la Dirichlet. A se vedea Evoluţia conceptului de funcţie după H. Hankel, în O. Becker, *Fundamentele matematicii*, pp. 251—252.

[11] Pentru Frege, sublinierea elementului de generalitate pe care îl comportă legea de punere în corespondenţă are o însemnătate cu atît mai mare cu cît el concepe funcţia (de un argument) ca peste tot definită pe domeniul ei (domeniul tuturor obiectelor, în cazul funcţiilor de prima treaptă, domeniu aşadar infinit).

Pe de altă parte, dacă ne amintim că şi conceptele sînt funcţii, invocarea generalităţii în locul variabilităţii capătă o motivare în plus.

[12] Aceasta devine evident dacă luăm în consideraţie conceptele: deosebirile dintre concepte nu sînt de ordin cantitativ, ci, ca să spunem aşa, calitativ. Totodată, oricărei funcţii i se poate asocia o *relaţie*, adică de asemenea o entitate care acceptă o caracterizare calitativă. Deosebirea dintre diferitele relaţii între cantităţi, între relaţii cantitative, aşadar, este ea însăşi calitativă.

[13] A se vedea „Funcţie şi concept".

[14] A se vedea şi nota 8, la „Funcţie şi concept".

[15] În continuare, Frege reia explicaţiile furnizate în „Despre funcţie şi obiect".

[16] Literele mici greceşti nu sînt utilizate de Frege nici ca variabile libere, nici ca variabile legate, ci într-o a treia utilizare specifică, pe care simbolismul curent al logicii predicatelor n-a mai păstrat-o sistematic. Ea revine însă frecvent în notaţiile metalogice pentru predicate, funcţii şi formule în genere, atunci cînd se doreşte indicarea locurilor goale prin umplerea cărora apar diferite expresii.

[17] Idee care revine stăruitor în scrierile lui Frege. Cititorul acestui volum a putut s-o întîlnească deja în „Concept şi obiect". În una din scrierile postume, Frege formulează pregnant acelaşi gînd: *„Este imposibil să redăm printr-*o *definiţie ce este* o *funcţie, întrucît aici este vorba despre ceva simplu şi indecompozabil.* Nu este posibil altceva decît să conducem la ceea ce avem în vedere, făcînd aceasta mai clar prin intermediul unei corelări cu ceea ce este deja cunoscut. În locul unei definiţii trebuie să intre în joc o explicaţie care, de bună seamă, trebuie să se bizuie pe o înţelegere venită în întîmpinare" (*Nachgelassene Schriften,* Bd. I, 1969, p. 254).

[18] Persistenţa „definiţiei" tradiţionale a funcţiei este exemplificată şi de *Dicţionarul Explicativ al Limbii Române: „Funcţie ...* 6. *(Mat.).* Mărime variabilă care depinde de una sau de mai multe mărimi variabile independente".

TABEL CRONOLOGIC

1848 La 8 noiembrie 1848 se naşte la Wismar, Friedrich Ludwig Gottlob Frege, fiul lui Karl Alexander Frege (1809—1866), director de şcoală, şi al Augustei Frege, născută Bialloblotzky, profesoară.

Un val de revoluţii zguduie Europa. Marx şi Engels publică *Manifestul Partidului Comunist.* Moare Bernard Bolzano supranumit „Leibniz al Boemiei", logicianul cel mai important din prima jumătate a secolului trecut, precursor al semanticii logice.

1854 George Boole (1815—1864), după ce publicase în 1847 *The Mathematical Analysis of Logic* dă acum la iveală *An Investigation into the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.*

1859 Augustus de Morgan redactează memoriul „On the Syllogism IV and on the Logic of Relations" (publicat în 1864), dezvoltînd o logică a relaţiilor. Darwin publică *Originea speciilor,* iar Marx *Contribuţii la critica economiei politice.* Se nasc E. Husserl şi H. Bergson.

1864—1869 Tînărul Frege urmează cursurile gimnaziului din Wismar, pe care îl absolvă în 1869; se înscrie la Universitatea din Jena.

În 1864, Jevons introduce disjuncţia neexclusivă în algebra booleană. În 1867 K. Marx publică primul volum din *Capitalul.*

În acelaşi an G. F. B. Riemann expune bazele geometriei sale neeuclidiene în *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen;* în 1869, Jevons construieşte o maşină logică pentru efectuarea mecanică a inferenţelor studiate de Boole.

1869—1870 Frege studiază, la Universitatea din Jena, chimia, filosofia, matematica.

În America, Ch. S. Peirce inițiază primele sale investigații asupra logicii relațiilor.

1871—1873 La Universitatea din Göttingen, Frege studiază filosofia religiei (cu Hermann Lotze), fizica și îndeosebi matematica.

În 1872 J. W. R. Dedekind (1831—1916) publică *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, o teorie a numerelor reale care resuscită teoria rapoartelor a lui Eudoxus în versiunea „tăieturii Dedekind". Se naște Bertrand Russell.

1873 Frege absolvă Universitatea din Göttingen și susține teza *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, obținînd la 12 noiembrie titlul de doctor în filosofie. Pregătește lucrarea sa de abilitare.

1874 Prezintă ca *Habilitationsschrift* lucrarea *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*. În luna mai este admis ca *Privatdozent* (lector) la Facultatea de Matematică a Universității din Jena; întreaga sa carieră universitară, timp de 44 ani, va fi legată de acest loc.

1874—1878 Frege recenzează trei cărți de matematică și publică un articol; pregătește *Begriffsschrift*. Se conturează tot mai clar proiectul unei fundamentări riguroase a aritmeticii pe baza logicii.

În 1877 Ernst Schröder publică *Der Operationskreis des Logikkalküls* iar Mc. Call, *The Calculus of Equivalent Statements*, o versiune a logicii propozițiilor.

1879 Apare la Halle *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, o piatră de hotar în istoria logicii. Frege insuflă logicii noi conținuturi, metode și obiective; fundează axiomatic logica propozițiilor, construiește logica predicatelor, indică mijloacele de formalizare a propozițiilor matematice, construiește primul sistem formal, definește concepte aritmetice prin idei logice, formu-

lează programul logicist. În același an, Frege promovează în ierarhia universitară la poziția de *ausserordentlicher Professor*.

1879—1883 Revoluționarea logicii de către Frege trece aproape neobservată; *Begriffsschrift* este primită rece, ignorată sau criticată. Dezamăgit, Frege scrie cîteva articole în apărarea „Scrierii conceptuale". Apar astfel „Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift" în 1882 și „Über den Zweck der Begriffsschrift" în 1883. Un articol de amploare — „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift" —, precum și „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift" îi sînt refuzate de cîteva reviste filosofice și matematice; manuscrisele vor fi editate abia în 1967.

În aceeași perioadă, Frege pregătește a doua sa carte, *Die Grundlagen der Arithmetik*.

În 1880, în timp ce mai apar multe *Logici* tributare paradigmei tradiționale, Ch. S. Peirce elaborează memoriile *On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation* și *On a Boolean Algebra with one Constant*. În 1881 apare *Symbolic Logic* a lui J. Venn. În 1883 H. O. Mitchell și apoi Ch. S. Peirce utilizează deja „cuantorii" (termenul îi aparține lui Peirce și va fi încetățenit în logică, dar Frege introdusese procedeul cuantificării încă în 1879, în *Begriffsschrift*). În 1883 Georg Cantor (1845—1918) publică *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre;* cartea înmănunchiază mai multe articole precedente. Teoria mulțimilor și a numerelor transfinite creată de Cantor va fi salutată de Frege în anul următor ca un pas înainte în știință.

1884 Frege publică *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine Logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. A doua carte a lui Frege marchează o dată în filosofia logicii și a matematicii. Definiția logicistă

a numărului va face carieră; preluată de la Cantor, Frege sau Russell, sau găsită independent, ea va apare în repetate rînduri în operele altor matematicieni. — La apariție, cartea lui Frege stîrnește prea puține ecouri.

1885 Frege comunică și publică *Über formale Theorien der Arithmetik.*

1886—1890 Frege lucrează intens la a treia sa carte, dezvoltînd și modificînd ideile sale logico-filosofice.

În 1887 *Was sind und was sollen die Zahlen?* de R. Dedekind abordează în spirit logicist teoria mulțimilor și fundarea aritmeticii și analizei. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889) de Peano enunță axiomele aritmeticii (anticipate de Dedekind în anul precedent, traducerea lor în limbaj logic se poate găsi încă în 1884 la Frege). În 1890 apare primul volum din *Vorlesungen über die Algebra der Logik* ale lui E. Schröder, monumentala monografie care sintetizează algebra logicii; celelalte volume vor apare pînă în 1905.

1891 Începutul unui deceniu fecund în care văd lumina tiparului scrieri fregeene importante; apar articolele „Über das Trägheitsgesetz" și „Funktion und Begriff".

E. Husserl publică prima sa carte *Philosophie der Arithmetik* unde discută și concepția lui Frege.

1892 Apare „Über Sinn und Bedeutung", contribuție epocală la elaborarea semanticii logice. Un alt articol care vede lumina tiparului în același an este „Über Begriff und Gegenstand"; totodată Frege recenzează *Zur Lehre vom Transfiniten* de Georg Cantor.

1893 La Jena apare primul volum din *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* În a treia carte, Frege își propune să dezvolte pas cu pas, cu maximă rigoare, programul logicist, să definească așadar ideile aritmeticii și să deducă legile ei în cadrul sistemului formal al logicii. La apariție, cartea nu

stîrneşte ecouri largi şi vor trebui să treacă şapte decenii pînă la reeditarea ei integrală.

1894 Frege recenzează *Philosophie der Arithmetik* a lui E. Husserl, în care ideile fregeene din *Fundamentele aritmeticii* (1884) erau puse în discuţie; recenzia marchează începutul influenţei fecunde a lui Frege asupra lui Husserl.

În *Notations de logique mathématique* (urmate între 1895—1908 de cinci versiuni ale unui *Formulaire de mathématiques*), Giuseppe Peano combină logica matematică şi demersul axiomatic în tentativa fundării matematicii.

1895 Frege publică articolul „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*" şi „Le nombre entier".

Cantor descoperă o antinomie în teoria mulţimilor; doi ani mai tîrziu, Burali-Forti o va descoperi în mod independent şi o va publica.

1896 Frege confruntă ideografia lui Peano cu propria lui „scriere conceptuală" şi semnalează lacune logice ale ideografiei în „Über die Begrîffsschrift des Herrn Peano und meine eigene". O scrisoare către G. Peano datată „Jena, 29 septembrie 1896" apare în „Rivista di Matematica" abia în 1899. — Este promovat în ierarhia universitară la rangul de Profesor onorific.

1897—1901 Ani de tăcere publicistică, întreruptă numai în 1899, cînd Frege publică o broşură polemică acerbă *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert;* totodată, ani de lucru intens, aşa cum atestă manuscrisele.

A. N. Whitehead publică în 1898 *Universal Algebra.*

În 1899 Cantor descoperă paradoxul care îi poartă numele; David Hilbert publică *Die Grundlagen der Geometrie,* prima axiomatizare pe deplin riguroasă a geometriei euclidiene, în spiritul axiomaticii formale. Bertrand Russell publică *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* (1900), iar Couturat, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*

(1901). În 1900—1901 apar *Logische Untersuchungen* în două volume de E. Husserl.

1902 An de răscruce pentru Frege; Bertrand Russell îi scrie, comunicînd descoperirea unui paradox în sistemul din *Grundgesetze;* Frege îi răspunde la 22 iunie. În octombrie al aceluiași an Frege scrie un *Appendix* pentru volumul II al cărții sale în care prezintă paradoxul lui Russell și recunoaște că sistemul logic al aritmeticii a fost zdruncinat din temelii, constatînd totodată caracterul general al crizei din fundamente.

1903 Apare la Jena volumul II din *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet.* În același an, publică primele două articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie,* discuție asupra axiomaticii formale hilbertiene.

Russell publică *The Principles of Mathematics,* carte în care prezintă pe larg concepțiile logico-aritmetice ale lui Frege, problema paradoxelor, soluția lui Frege etc.

1904—1917 În ultimii ani ai carierii sale universitare, Frege publică tot mai puțin și discontinuu: „Was ist eine Funktion?“ (1904), trei articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie* (1906); polemizează cu formalistul J. Thomae (1906—1908); în „The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics“ apar în 1912 observațiile sale la articolul lui P. Jourdain, „The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics“; între 1915—1917, revista „The Monist“ publică în traducere Prefața, Introducerea și primele șapte secțiuni din *Grundgesetze der Arithmetik,* vol. I.

Viața personală a lui Frege este marcată de drame. Copiii săi muriseră mai demult la o vîrstă fragedă și soții Frege adoptaseră în 1902 un copil, Alfred, pe care Frege îl va crește singur, întrucît soția sa moare în 1905.

În 1907 primeşte titlul onorific de *Hofrat*. Predă cursuri de matematici şi fundamente expunînd bazele logicii, propriul său sistem formal. Corespondează cu Russell, Hilbert, Husserl, Couturat şi cu alte personalităţi proeminente. Îl vizitează Wittgenstein; cursurile sale sînt audiate de către Rudolf Carnap.

În luptă cu decepţia şi oboseala care se instalează, Frege nu încetează să mediteze asupra bazelor aritmeticii şi filosofiei logicii. Manuscrisele editate postum arată că Frege lucra la o expunere sistematică a logicii sale. În primăvara anului 1914 redactează amplul fragment *Logik in der Mathematik*.

În aceşti ani, criza fundamentelor matematicii devine tot mai vizibilă. Russell, Zermelo, Hilbert şi Brouwer se angajează pe căi diferite în căutarea unei soluţii. La al III-lea Congres Internaţional de Matematică de la Heidelberg, în 1904, Hilbert conferenţiază „Despre fundamentele logicii şi aritmeticii", preconizînd fundarea riguroasă a conceptului de număr prin axiomatizare şi demonstraţii de consistenţă. În 1905 Jules Richard descoperă un nou paradox; Poincaré — în polemică cu Russell — exultă: logistica nu este numai eronată, ea generează paradoxuri! În 1906, Russell sugerează teoria „fără clase" — încercare de soluţionare a paradoxelor, iar în 1908 formulează prima versiune a teoriei tipurilor în articolul „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types". Tot în 1908 L. E. Brouwer publică un articol asupra incertitudinii principiilor logicii, preconizînd ca terţiul exclus să nu fie acceptat ca temei al raţionamentului matematic iar E. Zermelo dă prima axiomatizare a teoriei mulţimilor. În 1910, A. N. Whitehead şi B. Russell publică primul volum al monumentalei lor opere în trei volume (apărută pînă în 1913) *Principia Mathematica*, în care logica fregeană, combinată cu teoria tipurilor este pusă la baza întregii matematici; *Principia Mathematica* impune paradigma logicii simbolice. În 1914 moare Ch. S. Peirce.

L. Löwenheim publică primele cercetări metalogice asupra logicii predicatelor (1915). Hilbert şi un grup de matematicieni lucrează în vederea elaborării *metamatematicii (teoria demonstraţiilor).*

1918 Frege se pensionează şi se retrage la Bad Kleinen, unde va petrece ultimii ani de viaţă. Publică articolele „Der Gedanke: Eine Logische Untersuchung" şi „Die Verneinung: Eine Logische Untersuchung". Moare Georg Cantor.

1919—1925 În amurgul vieţii sale Frege nu mai publică decît a treia parte din ciclul *Logische Untersuchungen*, şi anume *Gedankengefüge*. În 1924—1925 abandonează concepţia logicistă, constatînd eşecul ei total şi schiţează proiectul unei fundări geometrice a conceptului de număr (fragmentele postume *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften; Zahlen und Arithmetik; Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik).*

Cercetări metalogice asupra calculului propoziţiilor şi predicatelor sînt întreprinse de către Post, Skolem, Bernays ş.a. Se cristalizează noţiunile metalogice de consistenţă şi completitudine, tehnicile de demonstrare a independenţei axiomelor, a consistenţei etc. E. Post şi J. Łukasiewicz ajung pe căi diferite la logicile polivalente. Th. Skolem descoperă limite ale mijloacelor de expresie ale logicii predicatelor. L. Wittgenstein publică *Tractatus logico-philosophicus* (1921). Începuturile Cercului de la Viena.

26 iulie 1925. Frege încetează din viaţă la Bad Kleinen. Moartea lui Frege trece aproape neobservată.

1926—1976 Renaştere — mai întîi lentă, apoi tot mai rapidă — a interesului pentru opera lui Frege pe fundalul interesului tot mai mare suscitat de dezvoltarea vertiginoasă a cercetărilor logice şi metamatematice. Manuscrisele, întregul fond ştiinţific, fregean sînt pre-

luate de Universitatea din Münster, unde Heinrich Scholz este profesor.

În 1934 se reeditează *Fundamentele aritmeticii.* Cartea e tradusă în italiană în 1948 şi în engleză în 1950 (ediţia bilingvă a lui J. Austin).

În 1935, la Congresul internaţional de filosofie ştiinţifică de la Paris, H. Scholz şi F. Bachmann prezintă comunicarea „Der wissenschaftliche Nachlass von G. Frege". Din păcate, o parte din manuscrisele fondului fregean pier în timpul războiului, într-un incendiu cauzat de un bombardament. Postumele vor fi editate mult mai tîrziu pe baza unor copii dactilografiate.

În 1952 P. Geach şi M. Black traduc şi editează *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.* Începînd din deceniul trecut reeditările şi traducerile se succed într-un ritm tot mai susţinut; *Begriffsschrift* apare din nou, fiind tradus totodată în engleză în două versiuni diferite; se reeditează toate celelalte scrieri antume ale lui Frege. În fine, în 1969 şi 1976 apar cele două volume ale ediţiei *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel;* reeditarea integrală a operei lui Frege poate fi considerată împlinită. Alături de articole care discută şi popularizează elementele disparate ale concepţiei fregeene, sînt elaborate primele sinteze mature, monografiile de anvergură. Frege este integrat definitiv în circuitul marilor valori ale logicii şi filosofiei.

TABLA DE MATERII